



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DEL ESTADO DE MÉXICO

---

---

FACULTAD DE CIENCIAS

OPERADORES ASOCIADOS A UNA TOPOLOGÍA  
SOBRE UN CONJUNTO Y SUS GENERALIZACIONES  
TOPOLÓGICAS

T E S I S

PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
MATEMÁTICO

PRESENTA:

ALFREDO JAVIER NAVA MONTOYA

ASESOR DE TESIS:

DR. FERNANDO OROZCO ZITLI

COASESOR DE TESIS:

DR. ENRIQUE CASTAÑEDA ALVARADO



Facultad de Ciencias, Toluca, noviembre 2025

# Resumen

---

La noción de operador asociado a una topología  $\Gamma$  sobre un conjunto  $X$  fue formulada por S. Kasahara en [7]. Con base en este enfoque, se presentan los conceptos de conjunto  $\alpha$ -semi abierto y  $\alpha$ -semi cerrado los cuales introdujeron C. Carpintero, E. Rosas y J. Vielma en [2] y los cuales fueron presentados como una generalización de los conjuntos semi abiertos introducidos por N. Levine en [8]. A partir de la noción de conjunto  $\alpha$ -semi abierto se derivan conceptos como  $\alpha$ -semi continuidad,  $\alpha$ -semi conexidad,  $\alpha$ -semi compacidad, propiedades de  $\alpha$ -semi separación, los cuales generalizan los conceptos clásicos de la topología general.

Este trabajo está enfocado en demostrar propiedades relevantes derivadas de los conceptos antes mencionados, en particular, nos concentraremos en analizar su comportamiento y las relaciones entre ellos, dando caracterizaciones concretas de ciertos espacios topológicos a través de estos conceptos.

# Índice general

---

<b>Introducción</b>	<b>v</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1. Espacios topológicos y conceptos elementales . . . . .	1
1.2. La topología de subespacio . . . . .	5
1.3. Funciones Continuas . . . . .	7
1.4. Conexidad . . . . .	9
1.5. Compacidad . . . . .	10
1.6. Operadores de Kuratowski . . . . .	11
<b>2. Operadores asociados a una topología</b>	<b>15</b>
2.1. Operador asociado a una familia de conjuntos . . . . .	15
2.2. Clases de operadores asociados a una topología . . . . .	17
2.3. Conjuntos $\alpha$ -semi abiertos & $\alpha$ -semi cerrados . . . . .	21
2.4. El $\alpha$ -semi interior & la $\alpha$ -semi cerradura de un conjunto . . . . .	29
2.5. Operador asociado a la topología de subespacio . . . . .	32

<b>3. Funciones <math>(\alpha, \beta)</math>-semi continuas, <math>(\alpha, \beta)</math>-semi abiertas &amp; <math>(\alpha, \beta)</math>-semi cerradas</b>	<b>36</b>
3.1. Funciones $(\alpha, \beta)$ -semi continuas . . . . .	36
3.2. Funciones $(\alpha, \beta)$ -semi abiertas & $(\alpha, \beta)$ -semi cerradas . . . . .	39
<b>4. <math>\alpha</math>-Semi Conexidad &amp; <math>\alpha</math>-Semi Compacidad</b>	<b>44</b>
4.1. Espacios $\alpha$ -semi conexos . . . . .	44
4.2. Espacios localmente $\alpha$ -semi conexos . . . . .	50
4.3. Espacios $\alpha$ -semi compactos . . . . .	53
4.4. Espacios localmente $\alpha$ -semi compactos . . . . .	56

# Introducción

---

Este trabajo inicia con la noción de operador asociado a una topología introducida por Kasahara en [7] y posteriormente estudiada por C. Carpintero, E. Rosas y J. Vielma en [2]. Además, se estudian dos clases de operadores asociados a una topología, los monótonos y los estrella, que se estudiarán por la gran importancia de sus implicaciones.

Con base en la noción de operador asociado a una topología, el punto de partida fundamental lo constituyen los conjuntos  $\alpha$ -semi abiertos y  $\alpha$ -semi cerrados que fueron formulados por C. Carpintero, E. Rosas y J. Vielma en [2] y además en [8, Definición 1. p. 36] se presenta un ejemplo de un operador asociado a una topología, usando el operador cerradura, el cual permite definir la noción de conjunto  $\alpha$ -semi abierto. En este trabajo usaremos operadores asociados a una topología mas generales que el operador cerradura para definir la colección de los conjuntos  $\alpha$ -semi abiertos, denotada por  $\alpha$ - $sO(X)$ , la cual nos va a permitir generalizar varios de los conceptos básicos de la topología general, sin embargo la familia  $\alpha$ - $sO(X)$  no posee una estructura topológica, por lo que se le pedirán condiciones adicionales a los operadores asociados a una topología. Se estudio y analizó los resultados dados por E. Rosas y J. Vielma en [3], [4], [12] y [13] con respecto a los conceptos de  $\alpha$ -

---

semi continuidad,  $\alpha$ -semi conexidad,  $\alpha$ -semi compacidad, entre otros. Cabe mencionar que, al considerar al operador  $\alpha$  como el operador identidad, los conceptos anteriores coinciden con las nociones de lo estudiado en topología general, por lo que también se estudian algunas generalizaciones de resultados importantes interpoladas a operadores asociados bajo ciertas condiciones.

## 1.1. Espacios topológicos y conceptos elementales

A lo largo de este capítulo presentaremos la mayoría de los conceptos elementales de topología general los cuales ayudarán al desarrollo de este trabajo.

**Definición 1.1.1** *Sea  $X$  un conjunto. Una **topología** en el conjunto  $X$  es una familia  $\Gamma$  de subconjuntos de  $X$  que satisface las siguientes condiciones:*

- i.  $\emptyset, X \in \Gamma$ .*
- ii. Si  $U, V \in \Gamma$  entonces  $U \cap V \in \Gamma$ .*
- iii. Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una colección de subconjuntos de  $\Gamma$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \Gamma$ .*

El conjunto  $X$  junto con la topología  $\Gamma$  recibe el nombre de **espacio topológico** denotado por  $(X, \Gamma)$ , y los elementos que pertenecen a  $\Gamma$  reciben el nombre de subconjuntos **abiertos** de  $(X, \Gamma)$ .

En este trabajo denotaremos al conjunto de los números reales como  $\mathbb{R}$ , al plano como  $\mathbb{R}^2$  y denotaremos  $\mathcal{T}_u$  a la topología usual o euclidiana.

**Definición 1.1.2** Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y sea  $U \subset X$ . Decimos que  $U$  es un subconjunto **cerrado** de  $(X, \Gamma)$  si  $X \setminus U$  es abierto, es decir, si  $X \setminus U \in \Gamma$ .

**Proposición 1.1.3** Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico. Entonces, se cumplen las siguientes condiciones:

- i.  $\emptyset, X$  son subconjuntos cerrados de  $(X, \Gamma)$ .
- ii. Si  $\{B_i\}_{i \in I}$  es una colección de subconjuntos cerrados de  $(X, \Gamma)$ , entonces  $\bigcap_{i \in I} B_i$  es un conjunto cerrado de  $(X, \Gamma)$ .
- iii. Si  $F, G$  son subconjuntos cerrados de  $(X, \Gamma)$ , entonces  $F \cup G$  es un conjunto cerrado de  $(X, \Gamma)$ .

**Demostración.** Dado que  $\emptyset, X \in \Gamma$ . Nótese que  $X \setminus X = \emptyset$  y  $X \setminus \emptyset = X$ . Por el inciso i. de la Definición 1.1.1,  $\emptyset$  y  $X$  son subconjuntos cerrados de  $(X, \Gamma)$ .

Por otro lado, sea  $\{B_i\}_{i \in I}$  una colección de subconjuntos cerrados de  $(X, \Gamma)$ . Entonces,  $X \setminus B_i \in \Gamma$  para todo  $i \in I$ . Por el inciso iii. de la Definición 1.1.1,  $\bigcup_{i \in I} X \setminus B_i \in \Gamma$ . Nótese que  $\bigcup_{i \in I} X \setminus B_i = X \setminus \bigcap_{i \in I} B_i$ . Por lo tanto  $\bigcap_{i \in I} B_i$  es un conjunto cerrado de  $(X, \Gamma)$ .

Finalmente, sean  $F$  y  $G$  subconjuntos cerrados de  $(X, \Gamma)$ . Entonces,  $X \setminus F, X \setminus G \in \Gamma$ . Por el inciso ii. de la Definición 1.1.1,  $(X \setminus F) \cap (X \setminus G) \in \Gamma$ . Nótese que  $(X \setminus F) \cap (X \setminus G) = X \setminus (F \cup G)$ . Por lo tanto,  $F \cup G$  es un conjunto cerrado de  $(X, \Gamma)$ . ■

**Definición 1.1.4** Sea  $x$  un elemento del espacio topológico  $(X, \Gamma)$ . Un subconjunto  $V$  de  $X$  es una **vecindad** de  $x$  en  $(X, \Gamma)$  si existe  $A \in \Gamma$  tal que  $x \in A \subset V$ . A la colección de vecindades de  $x$  en  $X$  le llamamos sistema de vecindades del punto  $x$  en  $X$  y lo denotamos como  $\mathcal{V}(x)$ .

**Definición 1.1.5** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $A \subset X$  no vacío. Un punto  $x \in X$  es un **punto de adherencia** de  $A$  si cada abierto  $U$  que contiene a  $x$ , cumple que  $U \cap A \neq \emptyset$ . Al conjunto que consiste en todos los puntos de adherencia de  $A$  lo llamamos la **cerradura** de  $A$  en  $X$  y lo denotamos como  $\text{cl}_X(A)$ . Si no existe confusión lo denotaremos simplemente como  $\text{cl}(A)$ .

La siguiente proposición lista algunas condiciones que cumple la cerradura de un conjunto y su demostración se puede consultar en [6, p. 69-70].

**Proposición 1.1.6** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $A, B \subset X$ . Entonces, se cumplen las siguientes condiciones:

- i.*  $A \subset \text{cl}(A)$ .
- ii.*  $A$  es cerrado si y sólo si  $A = \text{cl}(A)$ .
- iii.* Si  $A \subset B$ , entonces  $\text{cl}(A) \subset \text{cl}(B)$ .
- iv.*  $\text{cl}(\text{cl}(A)) = \text{cl}(A)$ . En particular,  $\text{cl}(A)$  es cerrado.
- v.*  $\text{cl}(A \cup B) = \text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)$ .

**Definición 1.1.7** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $A \subset X$ . Un punto  $x \in A$  es un **punto interior** de  $A$  si existe un abierto  $U$  tal que  $x \in U$  y

$U \subset A$ . Al conjunto de todos los puntos interiores de  $A$  le llamamos **interior** de  $A$  y lo denotamos por  $\text{int}_X(A)$ . Si no existe confusión lo denotaremos simplemente como  $\text{int}(A)$ .

La siguiente proposición lista algunas condiciones que cumple el interior de un conjunto y su demostración se puede consultar en [5, p. 48-49].

**Proposición 1.1.8** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $A, B \subset X$ . Entonces, se cumplen las siguientes condiciones.

- i.  $\text{int}(A) = X \setminus \text{cl}(X \setminus A)$ .
- ii.  $\text{int}(X \setminus A) = X \setminus \text{cl}(A)$ .
- iii. Si  $A \subset B$ , entonces  $\text{int}(A) \subset \text{int}(B)$ .
- iv.  $A$  es abierto si y sólo si  $\text{int}(A) = A$ .
- v.  $\text{int}(A \cap B) = \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$ .

**Definición 1.1.9** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $A \subset X$ . Un punto  $x \in X$  es un **punto frontera** de  $A$  si  $x \in \text{cl}(A) \cap \text{cl}(X \setminus A)$ . La **frontera** de  $A$  es el conjunto de todos los puntos frontera de  $A$ , la cual es denotada por  $\text{Fr}_X(A)$ . Si no existe confusión lo denotaremos simplemente como  $\text{Fr}(A)$ .

La siguiente proposición lista algunas condiciones que cumple la frontera de un conjunto y su demostración se puede consultar en [6, p. 72].

**Proposición 1.1.10** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $A, B \subset X$ . Entonces, se cumplen las siguientes condiciones.

- i.*  $\text{Fr}(A) = \text{cl}(A) \setminus \text{int}(A)$ .
- ii.*  $\text{Fr}(A) \cap \text{int}(A) = \emptyset$ .
- iii.*  $\text{cl}(A) = \text{int}(A) \cup \text{Fr}(A)$ .
- iv.*  $\text{Fr}(A \cup B) \subset \text{Fr}(A) \cup \text{Fr}(B)$ .

**Definición 1.1.11** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $D \subset X$ . Se dice que  $D$  es **denso** en  $X$  si  $\text{cl}(D) = X$ .

La demostración de la siguiente proposición se puede consultar en [6, p. 72].

**Proposición 1.1.12** Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i.*  $D$  es denso en  $X$ .
- ii.* Si  $F \subset X$  es cerrado y  $D \subset F$ , entonces  $F = X$ .
- iii.* El complemento de  $D$  en  $X$  tiene interior vacío.

## 1.2. La topología de subespacio

**Definición 1.2.1** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $Y \subset X$ . La colección  $\Gamma_Y = \{Y \cap U : U \in \Gamma\}$  es una topología sobre  $Y$ . La colección  $\Gamma_Y$  es llamada **topología de subespacio**. Con esta topología,  $Y$  se denomina **subespacio** de  $X$ .

**Proposición 1.2.2** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $Y$  un subespacio abierto de  $X$ . Si  $U$  es abierto en  $Y$ , entonces  $U$  es abierto en  $X$ .

**Demostración.** Sea  $U \in \Gamma_Y$ . Entonces,  $U = Y \cap V$  con  $V \in \Gamma$ . Dado que  $Y \in \Gamma$ , por la Definición 1.1.1,  $Y \cap V \in \Gamma$ . Por lo tanto  $U \in \Gamma$ . ■

**Proposición 1.2.3** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$ . Si  $U$  es cerrado en  $Y$ , entonces  $U$  es cerrado en  $X$ .

**Demostración.** Sea  $U$  un cerrado en  $(Y, \Gamma_Y)$ . Entonces,  $Y \setminus U \in \Gamma_Y$ . Así,  $Y \setminus U = Y \cap V$  con  $V \in \Gamma$ . Nótese que

$$U = Y \setminus (Y \setminus U) = Y \setminus (Y \cap V) = Y \cap (X \setminus V).$$

De lo anterior,  $U = Y \cap (X \setminus V)$ . Como  $Y$ ,  $X \setminus V$  son cerrados en  $(X, \Gamma)$  y por la Proposición 1.1.3,  $Y \cap (X \setminus V)$  es cerrado en  $(X, \Gamma)$ . Por lo tanto  $U$  es cerrado en  $(X, \Gamma)$ . ■

En un subespacio  $Y$  de un espacio topológico  $(X, \Gamma)$ , las nociones de cerradura, interior y frontera de un subconjunto  $E \subset Y$  admiten una caracterización en términos de las nociones correspondientes en el espacio topológico  $(X, \Gamma)$ . El siguiente teorema precisa dichas relaciones y su demostración se puede consultar en [5, p. 52-53].

**Teorema 1.2.4** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico,  $Y$  un subespacio de  $X$  y  $E \subset Y$ . Entonces, se cumple lo siguiente.

- i.  $\text{cl}_Y(E) = \text{cl}_X(E) \cap Y$ .
- ii.  $\text{int}_X(E) \cap Y \subset \text{int}_Y(E)$ .
- iii.  $\text{Fr}_Y(E) \subset \text{Fr}_X(E) \cap Y$ .

## 1.3. Funciones Continuas

**Definición 1.3.1** Sean  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Diremos que  $f$  es **continua** si para cualquier abierto  $U$  de  $Y$ ,  $f^{-1}(U)$  es abierto de  $X$ .

A continuación veamos una serie de propiedades que cumplen las funciones continuas y su demostración se puede consultar en [10, p. 73-74].

**Proposición 1.3.2** Sean  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$ ,  $(Z, \Psi)$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  funciones continuas. Entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

- i. La composición de  $f$  y  $g$ , es decir  $g \circ f : X \rightarrow Z$ , es continua.*
- ii. Sea  $A \subset X$  con la topología de subespacio, entonces la restricción  $f|_A : A \rightarrow Y$  es continua.*
- iii. Sea  $f(X)$  con la topología de subespacio, entonces  $f : X \rightarrow f(X)$ , es continua.*

El siguiente resultado lista formas distintas en las que se expresa la continuidad de una función y su demostración se puede consultar en [9, p. 118-119].

**Teorema 1.3.3** Sean  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Las siguientes condiciones son equivalentes:

- i.  $f$  es continua.*
- ii. Para cualquier cerrado  $F$  de  $Y$ , el conjunto  $f^{-1}(F)$  es cerrado de  $X$ .*

iii. Si  $A \subset X$ , entonces  $f(\text{cl}_X(A)) \subset \text{cl}_Y(f(A))$ .

iv. Si  $B \subset Y$ , entonces  $\text{cl}_X(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\text{cl}_Y(B))$ .

**Definición 1.3.4** Sean  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Diremos que  $f$  es una **función abierta** si para cualquier abierto  $U$  de  $X$ ,  $f(U)$  es abierto de  $Y$ .

**Definición 1.3.5** Sean  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Diremos que  $f$  es una **función cerrada** si para cualquier cerrado  $F$  de  $X$ ,  $f(F)$  es cerrado de  $Y$ .

Los siguientes resultados otorgan caracterizaciones de funciones abiertas y cerradas. Las demostraciones se pueden consultar en [6, p. 87].

**Teorema 1.3.6** Sean  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Entonces,  $f$  es abierta si y sólo si, para cada  $A \subset X$ ,  $f(\text{int}(A)) \subset \text{int}(f(A))$ .

**Teorema 1.3.7** Sean  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Entonces,  $f$  es cerrada si y sólo si, para cada  $A \subset X$ ,  $\text{cl}(f(A)) \subset f(\text{cl}(A))$ .

El siguiente resultado considera funciones biyectivas junto con los conceptos recién vistos y su demostración se puede consultar en [5, p. 82].

**Teorema 1.3.8** Sean  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función biyectiva. Las siguientes condiciones son equivalentes.

i.  $f^{-1}$  es continua.

ii.  $f$  es abierta.

iii.  $f$  es cerrada.

**Definición 1.3.9** Sean  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  espacios topológicos. Si  $f : X \rightarrow Y$  es una función continua y biyectiva tal que  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  es continua, diremos que  $f$  es un **homeomorfismo**. Si existe un homeomorfismo entre dos espacios topológicos  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  lo denotaremos por  $X \cong Y$ .

## 1.4. Conexidad

Los resultados que se verán en esta sección y sus demostraciones se pueden consultar en [5, p. 255-264].

**Definición 1.4.1** Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico. Una **separación** de  $X$  es un par de conjuntos abiertos  $U, V$  ajenos, no vacíos tales que  $X = U \cup V$ .

**Definición 1.4.2** Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico. Un conjunto que no puede expresarse como unión de dos conjuntos separados se dice que es **conexo**. En caso contrario, se dice que es **disconexo**.

**Proposición 1.4.3** Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i. El espacio  $X$  es conexo.
- ii. Los únicos conjuntos simultáneamente abiertos y cerrados son  $X$  y  $\emptyset$ .
- iii. Si  $A \subset X$  es no vacío y  $A \neq X$ , entonces  $\text{Fr}(A) \neq \emptyset$ .

**Definición 1.4.4** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $Y$  un subespacio de  $X$ . Se dirá que  $Y$  es *disconexo* si existen conjuntos en  $\Gamma_Y$  que forman una separación de  $Y$ .

**Proposición 1.4.5** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $Y$  un subespacio de  $X$ . Entonces,  $Y$  es *disconexo* si y sólo si existen  $A, B \subset X$  no vacíos tales que  $Y = A \cup B$  y  $\text{cl}(A) \cap B = A \cap \text{cl}(B) = \emptyset$ .

**Proposición 1.4.6** Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico. Si  $U, V$  forman una separación de  $X$  y  $Y$  es un subespacio conexo de  $X$ , entonces  $Y \subset U$  o  $Y \subset V$ .

**Proposición 1.4.7** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico,  $A$  un subespacio conexo de  $X$  y  $B \subset X$ . Si  $A \subset B \subset \text{cl}(A)$ , entonces  $B$  es conexo. En particular, la cerradura de un conjunto conexo es también un conjunto conexo.

**Proposición 1.4.8** Sean  $(X, \Gamma), (Y, \mathcal{T})$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua y suprayectiva. Si  $X$  es conexo, entonces  $Y$  es conexo.

**Teorema 1.4.9** Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico. Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia de subespacios conexos de  $X$  tales que  $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es conexo.

## 1.5. Compacidad

Los resultados que se verán en esta sección y sus demostraciones se pueden consultar en [9, p. 186-189].

**Definición 1.5.1** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia de subconjuntos de  $X$ . Si  $X = \bigcup_{i \in I} A_i$  diremos que  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una **cubierta** de  $X$ . Si además, cada uno de los elementos de  $\{A_i\}_{i \in I}$  es un subconjunto abierto de  $X$ , entonces le llamaremos a  $\{A_i\}_{i \in I}$  una **cubierta abierta** de  $X$ .

**Definición 1.5.2** Sean  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una cubierta de  $X$ . Si  $\{B_j\}_{j \in J}$  es una subcolección de  $\{A_i\}_{i \in I}$  y  $X = \bigcup_{j \in J} B_j$  diremos que  $\{B_j\}_{j \in J}$  es una **subcubierta** de  $\{A_i\}_{i \in I}$ .

**Definición 1.5.3** Un espacio topológico  $(X, \Gamma)$  es un espacio **compacto** si toda cubierta abierta de  $X$  tiene una subcubierta finita de  $X$ . Un subespacio topológico de  $X$  es compacto, si es compacto con la topología de subespacio.

**Proposición 1.5.4** Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico compacto y  $Y$  un subespacio cerrado de  $X$ . Entonces  $Y$  es compacto.

**Teorema 1.5.5** Sean  $(X, \Gamma)$ ,  $(Y, \mathcal{T})$  espacios topológicos y  $f : X \rightarrow Y$  una función continua. Si  $X$  es compacto, entonces  $f(X)$  es un subespacio compacto de  $Y$ .

## 1.6. Operadores de Kuratowski

Los resultados que se verán en esta sección y sus demostraciones se pueden consultar en [6, p. 73-74] y [5, p. 54-57].

**Definición 1.6.1** Sea  $X$  un conjunto. Diremos que una función  $\eta : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  es un **operador de Kuratowski** si satisface las siguientes condiciones, conocidas como *axiomas de Kuratowski*:

- i.  $\eta(\emptyset) = \emptyset$ .
- ii.  $E \subset \eta(E)$  para cualquier  $E \subset X$ .
- iii.  $\eta(\eta(E)) = \eta(E)$  para cualquier  $E \subset X$ .
- iv. Si  $E, F \subset X$ , entonces  $\eta(E \cup F) = \eta(E) \cup \eta(F)$ .

**Lema 1.6.2** Sean  $X$  un conjunto y  $\eta$  un operador de Kuratowski. Para cualesquiera  $E, F \subset X$  tal que  $E \subset F$ ,  $\eta(E) \subset \eta(F)$ .

**Proposición 1.6.3** Sean  $X$  un conjunto y  $\eta$  un operador de Kuratowski. Entonces, la familia  $\Gamma = \{X \setminus \eta(A) : A \in \mathcal{P}(X)\}$  es una topología en  $X$  y  $\text{cl}(A) = \eta(A)$  para todo  $A \subset X$ .

**Ejemplo 1.6.4** Sean  $X$  un conjunto y  $\eta : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  una función definida como:

$$\eta(E) = \begin{cases} E & \text{si } E \text{ es finito.} \\ X & \text{si } E \text{ es infinito.} \end{cases}$$

**Afirmación.** La función  $\eta$  es un operador de Kuratowski.

Nótese que  $\emptyset$  es finito. Así,  $\eta(\emptyset) = \emptyset$ . Ahora, sea  $E \subset X$ . Tenemos que  $\eta(E) = E$  o  $\eta(E) = X$ , en cualquier caso  $E \subset \eta(E)$ . Por otro lado, consideremos los siguientes casos:

**Caso I.** Supongamos que  $E$  es finito.

Tenemos que  $\eta(E)$  es finito pues  $E = \eta(E)$ . Entonces,  $\eta(\eta(E)) = \eta(E)$ .

**Caso II.** Supongamos que  $E$  es infinito.

Tenemos que  $\eta(E) = X$  y  $X$  es infinito pues  $E \subset X$ . Entonces,  $\eta(\eta(E)) =$

$\eta(X) = X = \eta(E)$ . Así,  $\eta(\eta(E)) = \eta(E)$ .

De los casos **I** y **II**, concluimos que para cualquier  $E \subset X$ ,  $\eta(\eta(E)) = \eta(E)$ .

Finalmente, sean  $E, F \subset X$ . Si  $E$  y  $F$  son finitos, entonces  $E \cup F$  es finito.

Así,  $\eta(E \cup F) = E \cup F = \eta(E) \cup \eta(F)$ . En el caso en que  $E$  o  $F$  es infinito (o ambos), entonces  $\eta(E \cup F) = X = \eta(E) \cup \eta(F)$ .

De lo anterior, concluimos que  $\eta$  es un operador de Kuratowski.

**Definición 1.6.5** *Sea  $X$  un conjunto. Diremos que una función  $\eta : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  es un **operador interior** si satisface las siguientes condiciones:*

- i.  $\eta(X) = X$ .*
- ii.  $\eta(E) \subset E$  para cualquier  $E \subset X$ .*
- iii.  $\eta(\eta(E)) = \eta(E)$  para cualquier  $E \subset X$ .*
- iv. Si  $E, F \subset X$ , entonces  $\eta(E \cap F) = \eta(E) \cap \eta(F)$ .*

**Lema 1.6.6** *Sean  $X$  un conjunto y  $\eta$  un operador interior. Para cualesquiera  $E, F \subset X$  tal que  $E \subset F$ ,  $\eta(E) \subset \eta(F)$ .*

**Proposición 1.6.7** *Sean  $X$  un conjunto y  $\eta$  un operador interior. Entonces, la familia  $\Gamma = \{\eta(A) : A \in \mathcal{P}(X)\}$  es una topología en  $X$ . Además,  $\text{int}(A) = \eta(A)$  para todo  $A \subset X$ .*

**Definición 1.6.8** *Sea  $X$  un conjunto. Diremos que una función  $\varphi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  es un **operador frontera** si satisface las siguientes condiciones:*

- i.  $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ .*
- ii.  $\varphi(E) = \varphi(X \setminus E)$  para cualquier  $E \subset X$ .*

iii.  $\varphi(\varphi(E)) \subset \varphi(E)$  para cualquier  $E \subset X$ .

iv. Si  $E, F \subset X$ , entonces  $E \cap F \cap \varphi(E \cap F) = E \cap F \cap [\varphi(E) \cup \varphi(F)]$ .

**Proposición 1.6.9** Sean  $X$  un conjunto y  $\varphi$  un operador frontera. Entonces, la familia  $\Gamma = \{X \setminus (A \cup \varphi(A)) : A \in \mathcal{P}(X)\}$  es una topología en  $X$ . Además,  $\text{Fr}(A) = \varphi(A)$  para todo  $A \subset X$ .

## Operadores asociados a una topología

---

### 2.1. Operador asociado a una familia de conjuntos

**Definición 2.1.1** Sean  $X$  un conjunto distinto del vacío,  $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$  distinto del vacío y  $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  una función. Se dice que  $\alpha$  es un **operador asociado** a  $\Gamma$ , si para todo  $U \in \Gamma$  se cumple que  $U \subset \alpha(U)$ .

El símbolo  $(X, \Gamma, \alpha)$  significa que  $X$  es un espacio topológico con  $\Gamma$  su topología y  $\alpha$  un operador asociado a  $\Gamma$ . En la siguiente definición recordamos algunos operadores conocidos.

**Definición 2.1.2** Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico. Definimos los siguientes operadores.

1. El operador identidad  $\text{Id} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definido como  $\text{Id}(A) = A$  para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$ .
2. El operador interior  $\text{Int} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definido como  $\text{Int}(A) = \text{int}(A)$  para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$ .

3. El operador cerradura  $\text{Cl} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definido como  $\text{Cl}(A) = \text{cl}(A)$  para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$ .
4. El operador interior-cerradura esta definido por la composición del operador interior con el operador cerradura,  $\text{Int} \circ \text{Cl}$ .
5. El operador complemento de la frontera  $\text{Fr}^c : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definido como  $\text{Fr}^c(A) = X \setminus \text{Fr}(A)$  para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$ .

Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico. Usando la definición anterior, obsérvese que los operadores  $\text{Id}$ ,  $\text{Int}$ ,  $\text{Cl}$  y  $\text{Int} \circ \text{Cl}$  son asociados a  $\Gamma$ . A continuación probaremos que el operador  $\text{Fr}^c$  es asociado a  $\Gamma$ .

**Proposición 2.1.3** *Sea  $(X, \Gamma)$  un espacio topológico. Entonces el operador  $\text{Fr}^c$  es asociado a  $\Gamma$ .*

**Demostración.** Sea  $A \in \Gamma$ . Probaremos que  $A \subset \text{Fr}^c(A)$ . Dado que  $\text{Fr}(A) = \text{cl}(A) \cap (X \setminus \text{int}(A))$ , se tiene  $X \setminus \text{Fr}(A) = X \setminus (\text{cl}(A) \cap (X \setminus \text{int}(A))) = (X \setminus \text{cl}(A)) \cup \text{int}(A)$ . Así, como  $A = \text{int}(A)$ , entonces  $A \subset X \setminus \text{Fr}(A)$ . Por lo tanto  $A \subset \text{Fr}^c(A)$ . ■

**Proposición 2.1.4** *Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $Y \subset X$ ,  $Y \neq X$  diferente del vacío. Entonces, el operador  $\beta : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definido como  $\beta(A) = \alpha(A) \cup Y$  para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$  es un operador asociado a  $\Gamma$ .*

**Demostración.** Sea  $U \in \Gamma$ . Dado que  $U \subset \alpha(U)$ , entonces  $U \subset \alpha(U) \cup Y = \beta(U)$ . Nótese que si  $Y$  es vacío no hay nada que probar pues  $\beta$  coincide con  $\alpha$ . ■

## 2.2. Clases de operadores asociados a una topología

En esta sección estudiamos dos clases de operadores asociados a una topología y algunas de sus implicaciones.

**Definición 2.2.1** Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$ . Se dice que  $\alpha$  es un operador **monótono** si para cada  $U, V \in \Gamma$  tales que  $U \subset V$ , se tiene que  $\alpha(U) \subset \alpha(V)$ .

**Definición 2.2.2** Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$ . Se dice que  $\alpha$  es un operador **estrella** si para cada  $U, V \in \Gamma$  se tiene que  $\alpha(U) \cap V \subset \alpha(U \cap V)$ .

El operador identidad, el operador interior y el operador cerradura son operadores monótonos y estrella.

**Proposición 2.2.3** El operador complemento de la frontera  $\text{Fr}^c$  es un operador estrella.

**Demostración.** Para probar que  $\text{Fr}^c$  es un operador estrella. Sean  $U, V \in \Gamma$ . Probaremos que  $(X \setminus \text{Fr}(U)) \cap V \subset (X \setminus \text{Fr}(U \cap V))$ . Observemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 [X \setminus \text{Fr}(U)] \cap V &= [X \setminus (\text{cl}(U) \setminus \text{int}(U))] \cap V \\
 &= [X \setminus (\text{cl}(U) \cap (X \setminus \text{int}(U)))] \cap V \\
 &= [(X \setminus \text{cl}(U)) \cup (X \setminus (X \setminus \text{int}(U)))] \cap V \\
 &= [(X \setminus \text{cl}(U)) \cup \text{int}(U)] \cap V \\
 &= [(X \setminus \text{cl}(U)) \cup U] \cap V,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X \setminus \text{Fr}(U \cap V) &= X \setminus (\text{cl}(U \cap V) \setminus \text{int}(U \cap V)) \\
 &= X \setminus (\text{cl}(U \cap V) \cap (X \setminus \text{int}(U \cap V))) \\
 &= (X \setminus \text{cl}(U \cap V)) \cup (X \setminus (X \setminus \text{int}(U \cap V))) \\
 &= (X \setminus \text{cl}(U \cap V)) \cup \text{int}(U \cap V) \\
 &= (X \setminus \text{cl}(U \cap V)) \cup (U \cap V).
 \end{aligned}$$

Suponiendo que  $x \in [X \setminus \text{Fr}(U)] \cap V$ , por lo anterior,  $x \in [(X \setminus \text{cl}(U)) \cup U]$  y  $x \in V$ . Consideremos los siguientes casos:

**Caso I.** Supongamos que  $x \in X \setminus \text{cl}(U)$ .

Dado que  $\text{cl}(U \cap V) \subset \text{cl}(U)$ ,  $x \in X \setminus \text{cl}(U \cap V)$ . Por lo cual  $x \in [X \setminus \text{cl}(U \cap V)] \cup (U \cap V)$ . Por lo que,  $x \in X \setminus \text{Fr}(U \cap V)$ .

**Caso II.** Supongamos que  $x \in U$ .

Dado que  $x \in V$ ,  $x \in U \cap V$ . Por lo que  $x \in [X \setminus \text{cl}(U \cap V)] \cup (U \cap V)$ . De donde,  $x \in X \setminus \text{Fr}(U \cap V)$ .

De lo anterior, concluimos que  $[X \setminus \text{Fr}(U)] \cap V \subset [X \setminus \text{Fr}(U \cap V)]$ .

Por lo tanto  $\text{Fr}^c$  es un operador estrella. ■

Ahora, mostraremos con un ejemplo que el operador  $\text{Fr}^c$  en general no es monótono. Consideremos el conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ , con la topología usual. Dado que  $(0, 1) \subset (0, 2)$  y  $\text{Fr}^c((0, 1)) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ ,  $\mathbb{R} \setminus \{0, 2\} = \text{Fr}^c((0, 2))$  pero  $\text{Fr}^c((0, 1)) \not\subset \text{Fr}^c((0, 2))$ . Así, el operador  $\text{Fr}^c$  no es monótono.

**Ejemplo 2.2.4** Sea  $X = \{a, b\}$  un conjunto con  $\Gamma = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\}$  su

topología. Definimos el operador  $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  tal que:

$$\alpha(U) = \begin{cases} U \cup \{a\} & \text{si } U \neq \emptyset. \\ \emptyset & \text{si } U = \emptyset. \end{cases}$$

**Afirmación.** El operador  $\alpha$  es monótono asociado a  $\Gamma$  pero no es estrella.

El hecho de que  $\alpha$  es un operador asociado a  $\Gamma$ , se sigue de que

$$\begin{aligned} \emptyset &\subset \alpha(\emptyset) = \emptyset; \\ \{a\} &\subset \alpha(\{a\}) = \{a\}; \\ \{b\} &\subset \alpha(\{b\}) = X; \\ X &\subset \alpha(X) = X. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que  $\emptyset \subset \{a\}$ ,  $\emptyset \subset \{b\}$ ,  $\emptyset \subset X$ ,  $\{a\} \subset X$ ,  $\{b\} \subset X$ , y nótese que  $\alpha(\emptyset) = \emptyset$ ,  $\alpha(\{a\}) = \{a\}$ ,  $\alpha(\{b\}) = X$ ,  $\alpha(X) = X$ . De lo anterior vemos que

$$\begin{aligned} \alpha(\emptyset) &\subset \alpha(\{a\}); \\ \alpha(\emptyset) &\subset \alpha(\{b\}); \\ \alpha(\emptyset) &\subset \alpha(X); \\ \alpha(\{a\}) &\subset \alpha(X); \\ \alpha(\{b\}) &\subset \alpha(X). \end{aligned}$$

Así,  $\alpha$  es un operador monótono asociado a  $\Gamma$ .

Finalmente, veremos que  $\alpha$  no es estrella. Supongamos lo contrario, que para  $\{b\}, \{a\} \in \Gamma$ , se tiene que

$$\alpha(\{b\}) \cap \{a\} = \{a\} \not\subset \emptyset = \alpha(\{b\} \cap \{a\}),$$

esto es una contradicción. Por lo tanto el operador  $\alpha$  es monótono asociado a  $\Gamma$  pero no es estrella.

**Proposición 2.2.5** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $Y \subset X$  diferente del vacío tal que  $Y \neq X$ . Si  $\alpha$  es un operador monótono y estrella, entonces el operador  $\beta : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definido como  $\beta(A) = \alpha(A) \cup Y$  para cada  $A \in \mathcal{P}(X)$  es un operador monótono y estrella asociado a  $\Gamma$ .

**Demostración.** Primero mostraremos que  $\beta$  es monótono.

Sean  $U, V \in \Gamma$  tales que  $U \subset V$ . Como  $\alpha$  es monótono,  $\alpha(U) \subset \alpha(V)$ . De este modo

$$\beta(U) = \alpha(U) \cup Y \subset \alpha(V) \cup Y = \beta(V).$$

Por lo que  $\beta$  es monótono.

Ahora mostraremos que  $\beta$  es estrella.

Sean  $U, V \in \Gamma$ . Mostraremos que  $\beta(U) \cap V \subset \beta(U \cap V)$ . Sea  $x \in \beta(U) \cap V$ . Entonces  $x \in [\alpha(U) \cup Y] \cap V = (\alpha(U) \cap V) \cup (Y \cap V)$ . Consideremos los siguientes casos:

**Caso I.** Supongamos que  $x \in \alpha(U) \cap V$ .

Como  $\alpha$  es estrella,  $x \in \alpha(U) \cap V \subset \alpha(U \cap V)$ . De donde  $x \in \alpha(U \cap V) \cup Y$ .

Por lo que  $x \in \beta(U \cap V)$ .

**Caso II.** Supongamos que  $x \in Y \cap V$ .

De donde  $x \in Y \cup \alpha(U \cap V)$ . Por lo que  $x \in \beta(U \cap V)$ .

De lo anterior, concluimos que  $\beta(U) \cap V \subset \beta(U \cap V)$ . Por lo tanto,  $\beta$  es un operador estrella. ■

**Definición 2.2.6** Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$ . Se dice que  $\alpha$  es un operador regular si para cualesquiera  $U, V \in \Gamma$ , con  $x \in U \cap V$ , existe  $W \in \Gamma$  tal que  $x \in \alpha(W) \subset \alpha(U) \cap \alpha(V)$ .

**Lema 2.2.7** Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$  con  $\alpha$  un operador monótono. Entonces  $\alpha$  es un operador regular.

**Demostración.** Supongamos que  $\alpha$  es un operador monótono. Probaremos que  $\alpha$  es un operador regular. Sean  $U, V \in \Gamma$  y  $x \in U \cap V$ . Dado que  $U \cap V \in \Gamma$ ,  $U \cap V \subset U$  y  $U \cap V \subset V$ , por hipótesis, tenemos que  $\alpha(U \cap V) \subset \alpha(U)$  y  $\alpha(U \cap V) \subset \alpha(V)$ . Por lo que  $\alpha(U \cap V) \subset \alpha(U) \cap \alpha(V)$ . Por lo tanto  $\alpha$  es un operador regular. ■

## 2.3. Conjuntos $\alpha$ -semi abiertos & $\alpha$ -semi cerrados

**Definición 2.3.1** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $A \subset X$ . Se dice que  $A$  es  $\alpha$ -semi abierto si existe  $U \in \Gamma$  tal que  $U \subset A \subset \alpha(U)$ . Un subconjunto  $A$  se dice  $\alpha$ -semi cerrado si  $X \setminus A$  es  $\alpha$ -semi abierto.

A la colección de los conjuntos  $\alpha$ -semi abiertos en  $X$  la denotamos por  $\alpha$ - $sO(X)$  y a la colección de los conjuntos  $\alpha$ -semi cerrados en  $X$  la denotamos por  $\alpha$ - $sC(X)$ .

Notemos que  $\emptyset, X \in \alpha$ - $sO(X)$ . A continuación veremos un ejemplo que muestra que en general la familia  $\alpha$ - $sO(X)$  no posee una estructura topológica para  $X$ .

**Ejemplo 2.3.2** Sea  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u, \alpha)$ , donde  $\mathcal{T}_u$  es la topología usual sobre  $\mathbb{R}$  y  $\alpha$  es el operador definido como sigue:

$$\alpha(A) = \begin{cases} A & \text{si } A \neq \emptyset. \\ \{1\} & \text{si } A = \emptyset. \end{cases}$$

**Afirmación 1.** El operador  $\alpha$  es asociado a  $\mathcal{T}_u$ .

Sea  $U \in \mathcal{T}_u$ . Probaremos que  $U \subset \alpha(U)$ . Consideremos los siguientes casos:

**Caso I.** Supongamos que  $A \neq \emptyset$ .

Claramente  $U \subset \alpha(U)$  pues  $\alpha(U) = U$ .

**Caso II.** Supongamos que  $U = \emptyset$ .

Dado que  $\alpha(U) = \{1\}$  y  $\emptyset \subset \{1\}$ , por lo que  $U \subset \alpha(U)$ .

Por lo tanto,  $\alpha$  es un operador asociado a  $\mathcal{T}_u$ .

**Afirmación 2.** El operador  $\alpha$  no es monótono.

Sean  $\emptyset, (0, 1) \in \mathcal{T}_u$ . Dado que  $\emptyset \subset (0, 1)$  y  $\alpha(\emptyset) = \{1\}, \alpha((0, 1)) = (0, 1)$  pero  $\alpha(\emptyset) \not\subset \alpha((0, 1))$ . Así,  $\alpha$  no es un operador monótono.

**Afirmación 3.** Se cumple que  $(-1, 1) \in \alpha\text{-}sO(\mathbb{R})$ .

Sea  $U = (-1, 1)$ . Dado que  $(-1, 1) \in \mathcal{T}_u$  y  $\alpha((-1, -1)) = (-1, 1)$ , entonces  $U \subset (-1, 1) \subset \alpha(U)$ . Por lo que  $(-1, 1) \in \alpha\text{-}sO(\mathbb{R})$ .

**Afirmación 4.** Se cumple que  $\{1\} \in \alpha\text{-}sO(\mathbb{R})$ .

Sea  $U = \emptyset$ . Dado que  $\emptyset \in \mathcal{T}_u$  y  $\alpha(\emptyset) = \{1\}$ , entonces  $U \subset \{1\} \subset \alpha(U)$ . Por lo que  $\{1\} \in \alpha\text{-}sO(\mathbb{R})$ .

**Afirmación 5.** Se cumple que  $(-1, 1) \cup \{1\} \notin \alpha\text{-}sO(\mathbb{R})$ .

Notemos que  $(-1, 1) \cup \{1\} = (-1, 1]$ . Supongamos que  $(-1, 1] \in \alpha\text{-}sO(\mathbb{R})$ . Entonces, existe  $W \in \mathcal{T}_u$  tal que  $W \subset (-1, 1] \subset \alpha(W)$ . Consideremos los siguientes casos:

**Caso I.** Supongamos que  $W \neq \emptyset$ .

Dado que  $\alpha(W) = W$  y  $W \subset (-1, 1] \subset \alpha(W)$ ,  $W = (-1, 1]$  pero  $(-1, 1] \notin \mathcal{T}_u$ , lo cual es una contradicción pues  $W \in \mathcal{T}_u$ .

**Caso II.** Supongamos que  $W = \emptyset$ .

Dado que  $\alpha(W) = \{1\}$  y  $(-1, 1] \subset \alpha(W) = \{1\}$ , se tiene una contradicción pues  $(-1, 1] \not\subset \{1\}$ .

Por lo tanto  $(-1, 1) \cup \{1\} \notin \alpha\text{-}sO(\mathbb{R})$ .

Observemos que bajo ciertas condiciones para el operador  $\alpha$  y para la colección  $\alpha\text{-}sO(X)$ , se tiene que la unión de  $\alpha$ -semi abiertos es un  $\alpha$ -semi abierto. El siguiente teorema formaliza este hecho.

**Teorema 2.3.3** *Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$  tal que  $\alpha$  es monótono. Si  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \alpha\text{-}sO(X)$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \alpha\text{-}sO(X)$ .*

**Demostración.** Sea  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \alpha\text{-}sO(X)$ . Para cada  $i \in I$ , existe  $U_i \in \Gamma$  tal que  $U_i \subset A_i \subset \alpha(U_i)$ . Por lo que  $\bigcup_{i \in I} U_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} \alpha(U_i)$ .

Por otra parte, dado que  $U_i \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  para todo  $i \in I$ ,  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \Gamma$  y como  $\alpha$  es monótono, tenemos que  $\alpha(U_i) \subset \alpha\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$  para todo  $i \in I$ . De donde

$$\bigcup_{i \in I} \alpha(U_i) \subset \alpha\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right).$$

De lo anterior, tenemos que

$$\bigcup_{i \in I} U_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i \subset \bigcup_{i \in I} \alpha(U_i) \subset \alpha \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right).$$

Así,

$$\bigcup_{i \in I} U_i \subset \bigcup_{i \in I} A_i \subset \alpha \left( \bigcup_{i \in I} U_i \right).$$

Por lo tanto  $\bigcup_{i \in I} A_i$  es un  $\alpha$ -semi abierto. ■

**Corolario 2.3.4** *Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$  tal que  $\alpha$  es monótono. Si  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \alpha$ - $sC(X)$ , entonces  $\bigcap_{i \in I} A_i \in \alpha$ - $sC(X)$ .*

**Demostración.** Sea  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \alpha$ - $sC(X)$ . Entonces  $\{X \setminus A_i\}_{i \in I} \subset \alpha$ - $sO(X)$ . Por el Teorema 2.3.3, tenemos que  $\bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i)$  es  $\alpha$ -semi abierto. Usando que  $\bigcup_{i \in I} (X \setminus A_i) = X \setminus \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right)$ , tenemos que  $\bigcap_{i \in I} A_i$  es  $\alpha$ -semi cerrado. ■

En la siguiente definición, cuando  $\alpha$  es el operador cerradura la definición coincide a la dada por Caldas en [1].

**Definición 2.3.5** *Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $A \subset X$ . Diremos que  $A$  es una  $\alpha$ -semi vecindad de un punto de  $x \in X$ , si existe  $O_x \in \alpha$ - $sO(X)$  tal que  $x \in O_x \subset A$ . A la familia de  $\alpha$ -semi vecindades de  $x \in X$  la denotamos como  $\alpha$ - $SV(x)$ .*

**Proposición 2.3.6** *Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  tal que  $\alpha$  es monótono y  $A \subset X$ . Entonces,  $A \in \alpha$ - $sO(X)$  si y sólo si  $A$  es una  $\alpha$ -semi vecindad de cada uno de sus puntos.*

**Demostración.** Supongamos que  $A \in \alpha\text{-}sO(X)$ . Sea  $x \in A$ . Dado que  $A \subset A$ , concluimos que  $A$  es una  $\alpha$ -semi vecindad para  $x$ . Por lo tanto  $A$  es una  $\alpha$ -semi vecindad de cada uno de sus puntos.

Ahora, sea  $x \in A$  tal que  $A \in \alpha\text{-}SV(x)$ . Entonces, existe  $O_x \in \alpha\text{-}sO(X)$  tal que  $x \in O_x \subset A$ . De donde  $\bigcup_{x \in A} O_x = A$ . Tenemos que  $\alpha$  es monótono. Entonces, por el Teorema **2.3.3**,  $A = \bigcup_{x \in A} O_x \in \alpha\text{-}sO(X)$ . ■

El siguiente lema fue formulado por C. Carpintero, E. Rosas y J. Vielma en [2] y generaliza el resultado dado por Caldas en [1].

**Lema 2.3.7** *Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$  tal que  $\alpha$  es estrella. Si  $A \in \Gamma$  y  $O \in \alpha\text{-}sO(X)$ , entonces  $O \cap A \in \alpha\text{-}sO(X)$ .*

**Demostración.** Como  $O \in \alpha\text{-}sO(X)$ , existe  $U \in \Gamma$  tal que  $U \subset O \subset \alpha(U)$ . Entonces  $U \cap A \subset O \cap A \subset \alpha(U) \cap A$ . Como  $\alpha$  es estrella y  $U, A \in \Gamma$ ,  $\alpha(U) \cap A \subset \alpha(U \cap A)$ , se tiene que  $U \cap A \subset O \cap A \subset \alpha(U \cap A)$  y  $U \cap A \in \Gamma$ . Por lo tanto  $O \cap A \in \alpha\text{-}sO(X)$ . ■

**Definición 2.3.8** *Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $\{A_i\}_{i \in I}$  es una familia  $\alpha$ -semi localmente finita ( $\alpha\text{-s.l.f.}$ ) si para cada  $x \in X$ , existe  $O_x \in \alpha\text{-}sO(X)$  tal que  $x \in O_x$  y  $O_x \cap A_i = \emptyset$  para todo  $i$  excepto un número finito de índices  $i \in I$ .*

**Observación 2.3.9** *Si  $\{A_i\}_{i \in I}$  es  $\alpha\text{-s.l.f.}$  de  $X$ , entonces para cada  $x \in X$  existe  $O_x \in \alpha\text{-}sO(X)$  tal que  $x \in O_x$  y un subconjunto finito  $\Omega_x$  de  $I$  tal que  $O_x \subset \bigcap_{i \in I \setminus \Omega_x} (X \setminus A_i)$ .*

**Definición 2.3.10** Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos de  $X$ . Decimos que  $\{A_i\}_{i \in I}$  es  $\alpha$ -s.l.f. relativa ( $\alpha$ -s.l.f.r.) a un subconjunto  $T$  de  $X$  si dicha familia es  $\alpha$ -s.l.f. para todo  $x \in T$ .

**Teorema 2.3.11** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  tal que  $\alpha$  es estrella, monótono y  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \Gamma$ . Entonces,  $\bigcap_{i \in I} A_i \in \alpha$ -sO( $X$ ) si y sólo si la familia  $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$  es  $\alpha$ -s.l.f.r. a  $\bigcap_{i \in I} A_i$ .

**Demostración.** Supongamos que  $A = \bigcap_{i \in I} A_i \in \alpha$ -sO( $X$ ). Observamos la siguiente igualdad:

$$\emptyset = A \cap (X \setminus A) = A \cap \left( X \setminus \left( \bigcap_{i \in I} A_i \right) \right) = A \cap \left( \bigcup_{i \in I} X \setminus A_i \right) = \bigcup_{i \in I} [A \cap (X \setminus A_i)].$$

De lo anterior,  $A \cap (X \setminus A_i) = \emptyset$  para todo  $i \in I$ . Por lo tanto  $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$  es  $\alpha$ -s.l.f.r. a  $A$ .

Ahora, supongamos que  $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$  es  $\alpha$ -s.l.f.r. a  $A = \bigcap_{i \in I} A_i$ . Para probar que  $A \in \alpha$ -sO( $X$ ), sea  $x \in A$ . Entonces, existe un subconjunto finito  $\Omega_x \subset I$  y  $O_x \in \alpha$ -sO( $X$ ) tales que  $x \in O_x$  y  $O_x \cap (X \setminus A_i) = \emptyset$  para toda  $i \in I \setminus \Omega_x$ . Así,

$$O_x \subset \bigcap_{i \in I \setminus \Omega_x} [X \setminus (X \setminus A_i)] = \bigcap_{i \in I \setminus \Omega_x} A_i.$$

Observemos que  $x \in \bigcap_{i \in \Omega_x} A_i \in \Gamma$ . De donde  $x \in O_x \cap \left( \bigcap_{i \in \Omega_x} A_i \right)$ . Por el Lema 2.3.7, tenemos que  $O_x \cap \left( \bigcap_{i \in \Omega_x} A_i \right) \in \alpha$ -sO( $X$ ). Dado que

$$O_x \cap \left( \bigcap_{i \in \Omega_x} A_i \right) \subset \left( \bigcap_{i \in I \setminus \Omega_x} A_i \right) \cap \left( \bigcap_{i \in \Omega_x} A_i \right) = \bigcap_{i \in I} A_i = A,$$

se tiene que  $x \in O_x \cap \left( \bigcap_{i \in \Omega_x} A_i \right) \subset A$ . Por lo que  $A$  es una unión de  $\alpha$ -semi abiertos. De donde, por el Teorema **2.3.3**,  $A \in \alpha\text{-}sO(X)$ . ■

**Corolario 2.3.12** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  tal que  $\alpha$  es estrella y monótono y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos cerrados de  $X$ . Entonces,  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \alpha\text{-}sC(X)$  si y sólo si la familia  $\{A_i\}_{i \in I}$  es  $\alpha\text{-}s.l.f.r.$  a  $D = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$ .

**Demostración.** Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos cerrados de  $X$  tal que  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \alpha\text{-}sC(X)$ . Hagamos  $D = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i$ . Entonces  $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$  es una familia de subconjuntos abiertos de  $X$  y  $D = X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} X \setminus A_i \in \alpha\text{-}sO(X)$ . Por el Teorema **2.3.11**, la familia  $\{X \setminus (X \setminus A_i)\}_{i \in I}$  es  $\alpha\text{-}s.l.f.r.$  a  $\bigcap_{i \in I} X \setminus A_i$ . Por lo que, la familia  $\{A_i\}_{i \in I}$  es  $\alpha\text{-}s.l.f.r.$  a  $D$ .

Ahora, supongamos que la familia  $\{A_i\}_{i \in I}$  es  $\alpha\text{-}s.l.f.r.$  a  $D$ . Como  $D = \bigcap_{i \in I} (X \setminus A_i)$  y  $\{X \setminus A_i\}_{i \in I}$  es una familia de subconjuntos abiertos de  $X$ , por el Teorema **2.3.11**,  $\bigcap_{i \in I} X \setminus A_i \in \alpha\text{-}sO(X)$ . Por lo que,  $(X \setminus \bigcup_{i \in I} A_i) \in \alpha\text{-}sO(X)$ . Por lo tanto  $\bigcup_{i \in I} A_i \in \alpha\text{-}sC(X)$ . ■

El siguiente lema formulado por C. Carpintero, E. Rosas y J. Vielma en [3] nos da una caracterización de los conjuntos  $\alpha$ -semi abiertos cuando el operador  $\alpha$  es monótono y generaliza al resultado dado por Levine en [8].

**Lema 2.3.13** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  tal que  $\alpha$  es monótono y  $A \subset X$ . Entonces  $A \in \alpha\text{-}sO(X)$  si y sólo si  $A \subset \alpha(\text{int}(A))$ .

**Demostración.** Supongamos que  $A \in \alpha\text{-}sO(X)$ . Entonces existe  $U \in \Gamma$  tal que  $U \subset A \subset \alpha(U)$ . Así, dado que  $U \subset \text{int}(A)$  y  $\alpha$  es monótono,  $\alpha(U) \subset \alpha(\text{int}(A))$ . Por lo que  $A \subset \alpha(\text{int}(A))$ .

Ahora, supongamos que  $A \subset \alpha(\text{int}(A))$ . Entonces  $\text{int}(A) \subset A \subset \alpha(\text{int}(A))$ . Por lo que  $A \in \alpha\text{-}sO(X)$ . ■

Mostraremos con un ejemplo que la hipótesis de que  $\alpha$  sea un operador monótono en el Lema **2.2.6** es necesaria.

**Ejemplo 2.3.14** Consideramos el espacio topológico  $X = \{a, b, c, d\}$  con  $\Gamma = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$  su topología y el operador  $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definido como:

$$\alpha(A) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } A = \emptyset, \\ \{a, b\}, & \text{si } A = \{a, b\}, \\ X, & \text{si } A = \{a\} \text{ o } A = X, \\ A, & \text{si } A \notin \Gamma. \end{cases}$$

Nótese que  $\alpha$  es un operador asociado a  $\Gamma$ . Ahora veamos que no es monótono.

**Afirmación 1.** El operador  $\alpha$  no es monótono.

Sean  $\{a\}, \{a, b\} \in \Gamma$ . Dado que  $X = \alpha(\{a\})$  y  $\alpha(\{a, b\}) = \{a, b\}$ , se tiene que  $\alpha(\{a\}) \not\subset \alpha(\{a, b\})$ . Por lo que  $\alpha$  no es monótono.

**Afirmación 2.** El conjunto  $\{a, b, c\}$  es  $\alpha$ -semi abierto.

Como  $\{a\} \subset \{a, b, c\} \subset X = \alpha(\{a\})$  y  $\{a\} \in \Gamma$ ,  $\{a, b, c\} \in \alpha\text{-}sO(X)$ .

**Afirmación 3.** Se cumple que  $\{a, b, c\} \not\subset \alpha(\text{int}(\{a, b, c\}))$ .

Dado que  $\{a, b, c\} \in \alpha\text{-}sO(X)$  y  $\alpha(\text{int}(\{a, b, c\})) = \alpha(\{a, b\}) = \{a, b\}$ , se tiene que  $\{a, b, c\} \not\subset \alpha(\text{int}(\{a, b, c\}))$ .

De la Afirmaciones 1, 2, 3, se tiene que la hipótesis de que el operador sea monótono es necesaria.

## 2.4. El $\alpha$ -semi interior & la $\alpha$ -semi cerradura de un conjunto

Podemos introducir de manera natural las nociones de  $\alpha$ -semi interior y  $\alpha$ -semi cerradura de un conjunto, de la siguiente manera.

**Definición 2.4.1** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $A \subset X$ . Definimos y denotamos el  $\alpha$ -semi interior de  $A$  por:

$$\alpha\text{-sInt}(A) = \bigcup \{U \in \alpha\text{-sO}(X) : U \subset A\}.$$

Observemos que, por el Teorema **2.3.3**, cuando el operador  $\alpha$  es monótono,  $\alpha\text{-sInt}(A) \in \alpha\text{-sO}(X)$ .

**Definición 2.4.2** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $A \subset X$ . Definimos y denotamos la  $\alpha$ -semi cerradura de  $A$  por:

$$\alpha\text{-sCl}(A) = \bigcap \{F \in \alpha\text{-sC}(X) : A \subset F\}.$$

Observemos que, por el Corolario **2.3.4**, cuando el operador  $\alpha$  es monótono,  $\alpha\text{-sCl}(B) \in \alpha\text{-sC}(X)$ .

**Definición 2.4.3** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $A \subset X$  y  $x \in X$ . Decimos que  $x$  es un punto  $\alpha$ -semi adherente de  $A$  si para todo  $O_x \in \alpha\text{-sO}(X)$  tal que  $x \in O_x$  se tiene que  $O_x \cap A \neq \emptyset$ .

**Proposición 2.4.4** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $A \subset X$ . Entonces  $\alpha\text{-sCl}(A)$  es igual al conjunto de todos los puntos  $x \in X$  que son  $\alpha$ -semi adherentes de  $A$ .

**Demostración.** Sean  $x \in \alpha\text{-sCl}(A)$  y  $O_x \in \alpha\text{-sO}(X)$  tal que  $x \in O_x$ . Supongamos que  $O_x \cap A = \emptyset$ . Entonces,  $A \subset X \setminus O_x$ . Nótese que  $X \setminus O_x \in \alpha\text{-sC}(X)$ . Por la Definición **2.4.2**,  $\alpha\text{-sCl}(A) \subset X \setminus O_x$ . De lo anterior,  $x \in X \setminus O_x$ , lo cual es una contradicción. Así,  $O_x \cap A \neq \emptyset$ . Por lo tanto  $x$  es un punto  $\alpha$ -semi adherente de  $A$ .

Ahora, sea  $x$  un punto  $\alpha$ -semi adherente de  $A$ . Supongamos que  $x \notin \alpha\text{-sCl}(A)$ . Entonces,  $x \notin F$  para algún  $F \in \alpha\text{-sC}(X)$  tal que  $A \subset F$ . Así,  $x \in X \setminus F$ . Nótese que  $X \setminus F \in \alpha\text{-sO}(X)$ . Por la Definición **2.4.3**,  $(X \setminus F) \cap A \neq \emptyset$ . Lo anterior es una contradicción pues como  $A \subset F$ ,  $(X \setminus F) \cap A = \emptyset$ . Por lo tanto  $x \in \alpha\text{-sCl}(A)$ . ■

**Proposición 2.4.5** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $A, B \subset X$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:

- i.*  $\alpha\text{-sInt}(A) \subset A \subset \alpha\text{-sCl}(A)$ .
- ii.* Si  $A \subset B$ , entonces  $\alpha\text{-sInt}(A) \subset \alpha\text{-sInt}(B)$ .
- iii.* Si  $A \subset B$ , entonces  $\alpha\text{-sCl}(A) \subset \alpha\text{-sCl}(B)$ .
- iv.*  $\alpha\text{-sCl}(A \cap B) \subset \alpha\text{-sCl}(A) \cap \alpha\text{-sCl}(B)$ .

**Demostración.**

- i.* Esta afirmación es una consecuencia de las definiciones **2.4.1** y **2.4.2**.
- ii.* Sea  $x \in \alpha\text{-sInt}(A)$ . Entonces existe  $U \in \alpha\text{-sO}(X)$  tal que  $x \in U \subset A$ . Dado que  $A \subset B$ ,  $x \in U \subset A \subset B$ . Por lo que  $x \in \alpha\text{-sInt}(B)$ . Esto prueba que  $\alpha\text{-sInt}(A) \subset \alpha\text{-sInt}(B)$ .

*iii.* Sea  $x \in \alpha\text{-sCl}(A)$ . Por la Proposición **2.4.4**, probaremos que  $x$  es un punto  $\alpha$ -semi adherente de  $B$ . Sea  $O_x \in \alpha\text{-sO}(X)$  tal que  $x \in O_x$ . Dado que  $x$  es un punto  $\alpha$ -semi adherente de  $A$ , se cumple que  $O_x \cap A \neq \emptyset$ . Usando que  $A \subset B$ , tenemos que  $O_x \cap B \neq \emptyset$ . Por lo que  $x$  es un punto  $\alpha$ -semi adherente de  $B$ . Por lo tanto  $x \in \alpha\text{-sCl}(B)$ .

*iv.* Observamos lo siguiente:  $A \cap B \subset A$  y  $A \cap B \subset B$ . Aplicando el inciso *i.* tenemos que  $\alpha\text{-sCl}(A \cap B) \subset \alpha\text{-sCl}(A)$  y  $\alpha\text{-sCl}(A \cap B) \subset \alpha\text{-sCl}(B)$ . Por lo que  $\alpha\text{-sCl}(A \cap B) \subset \alpha\text{-sCl}(A) \cap \alpha\text{-sCl}(B)$ .

■

Observamos que en la proposición anterior no se requirió que el operador  $\alpha$  fuera monótono, la siguiente proposición es una consecuencia del Teorema **2.3.3**.

**Proposición 2.4.6** *Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  tal que  $\alpha$  es monótono y  $A, B \subset X$ . Entonces se cumplen las siguientes afirmaciones:*

- i.*  $A \in \alpha\text{-sO}(X)$  si y sólo si  $A = \alpha\text{-sInt}(A)$ .
- ii.*  $B \in \alpha\text{-sC}(X)$  si y sólo si  $B = \alpha\text{-sCl}(B)$ .

**Demostración.**

- i.* Supongamos que  $A \in \alpha\text{-sO}(X)$ . De la Definición **2.4.1**,  $A = \alpha\text{-sInt}(A)$ . Ahora, suponemos que  $A = \alpha\text{-sInt}(A)$ . Por definición del  $\alpha$ -semi interior de un conjunto y por el Teorema **2.3.3**, se sigue que  $A \in \alpha\text{-sO}(X)$ .
- ii.* Supongamos que  $B \in \alpha\text{-sC}(X)$ . Por el inciso *i.* de la Proposición **2.4.5**, para la necesidad, es suficiente demostrar que  $\alpha\text{-sCl}(B) \subset B$ .

Sea  $x \in \alpha\text{-sCl}(B)$ . Supongamos que  $x \notin B$ . Tenemos que  $x \in (X \setminus B)$ . Como  $B \in \alpha\text{-sC}(X)$ ,  $X \setminus B \in \alpha\text{-sO}(X)$ . De esta manera,  $(X \setminus B) \cap B \neq \emptyset$ , esto es una contradicción. Así,  $x \in B$ . Por lo que  $\alpha\text{-sCl}(B) \subset B$ . Por lo tanto  $B = \alpha\text{-sCl}(B)$ .

Ahora, supongamos que  $B = \alpha\text{-sCl}(B)$  y  $\alpha$  es monótono, por el Corolario 2.3.4,  $B \in \alpha\text{-sC}(X)$ . ■

Esto engloba algunas de las propiedades que se pueden extrapolar de los conceptos comunes sobre el interior y la cerradura de un conjunto.

**Lema 2.4.7** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $A \subset X$ . Siempre se cumple que  $\alpha\text{-sCl}(A) \subset \text{cl}(A)$ .

**Demostración.** Notemos que todo conjunto cerrado es  $\alpha$ -semi cerrado pues si  $F$  es cerrado, entonces  $X \setminus F$  es abierto, y por tanto  $\alpha$ -semi abierto. Dado que  $F \subset \text{cl}(F)$  y por la Definición 2.4.2,  $\alpha\text{-sCl}(F) \subset \text{cl}(F)$ . ■

## 2.5. Operador asociado a la topología de subespacio

Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $Y$  un subespacio de  $(X, \Gamma)$  con su topología  $\Gamma_Y$ . En esta sección definiremos un operador asociado a  $\Gamma_Y$ , y probaremos algunos resultados relacionados a subespacios.

**Proposición 2.5.1** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $Y$  un subespacio de  $X$ . Definimos  $\alpha_Y : \Gamma_Y \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  como  $\alpha_Y(U \cap Y) = \alpha(U) \cap Y$ , donde  $U \in \Gamma$ . Entonces  $\alpha_Y$  es un operador asociado a  $\Gamma_Y$ .

**Demostración.** Sea  $U \in \Gamma$ . Dado que  $U \subset \alpha(U)$ , se tiene que

$$U \cap Y \subset \alpha(U) \cap Y = \alpha_Y(U \cap Y).$$

Por lo que  $\alpha_Y$  es un operador asociado a  $\Gamma_Y$ . ■

En esta sección, para  $(X, \Gamma, \alpha)$ , consideramos la terna  $(Y, \Gamma_Y, \alpha_Y)$ , donde  $Y$  es un subespacio de  $X$ ,  $\Gamma_Y$  su topología y  $\alpha_Y$  un operador asociado a  $\Gamma_Y$ .

**Proposición 2.5.2** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \Gamma_Y, \alpha_Y)$ . Si  $\alpha$  es un operador monótono, entonces  $\alpha_Y$  es un operador monótono.

**Demostración.** Sean  $U, V \in \Gamma$ , tales que  $U \subset V$ . Dado que  $\alpha$  es monótono,  $\alpha(U) \subset \alpha(V)$ , entonces  $\alpha(U) \cap Y \subset \alpha(V) \cap Y$ , es decir,  $\alpha_Y(U \cap Y) \subset \alpha_Y(V \cap Y)$  con  $U \cap Y, V \cap Y \in \Gamma_Y$ . Por lo tanto  $\alpha_Y$  es monótono. ■

**Proposición 2.5.3** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \Gamma_Y, \alpha_Y)$ . Si  $\alpha$  es un operador estrella, entonces  $\alpha_Y$  es un operador estrella.

**Demostración.** Sean  $U, V \in \Gamma$ . Por un lado, se tiene que

$$\alpha(U) \cap V \cap Y = (\alpha(U) \cap Y) \cap (V \cap Y) = \alpha_Y(U \cap Y) \cap (V \cap Y).$$

Por otro lado, tenemos que

$$\alpha(U \cap V) \cap Y = \alpha_Y((U \cap V) \cap Y) = \alpha_Y((U \cap Y) \cap (V \cap Y)).$$

De lo anterior y como  $\alpha$  es estrella, entonces  $\alpha(U) \cap V \subset \alpha(U \cap V)$ . Así

$$\alpha_Y(U \cap Y) \cap (V \cap Y) \subset \alpha_Y((U \cap Y) \cap (V \cap Y)),$$

con  $U \cap Y, V \cap Y \in \Gamma_Y$ . Por lo tanto  $\alpha_Y$  es estrella. ■

**Proposición 2.5.4** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \Gamma_Y, \alpha_Y)$  y  $A \subset Y$ . Se cumple que  $\alpha_Y\text{-sCl}(A) = Y \cap \alpha\text{-sCl}(A)$ .

**Demostración.** Sea  $x \in \alpha_Y\text{-sCl}(A)$ . Probaremos que  $x$  es un punto  $\alpha$ -semi adherente de  $A$ . Sea  $U_x \in \alpha\text{-sO}(X)$  con  $x \in U_x$ , entonces existe  $W \in \Gamma$  tal que  $W \subset U_x \subset \alpha(W)$ , de donde  $W \cap Y \in \Gamma_Y$ . Por lo anterior y la Proposición **2.5.1**, tenemos que

$$W \cap Y \subset U_x \cap Y \subset \alpha(W) \cap Y = \alpha_Y(W \cap Y).$$

Entonces,  $U_x \cap Y \in \alpha_Y\text{-sO}(Y)$ . Es claro que  $x \in Y$  y  $x \in U_x$ ,  $x \in U_x \cap Y$ , además  $x \in \alpha_Y\text{-sCl}(A)$ , entonces por la Proposición **2.4.4**,  $(U_x \cap Y) \cap A \neq \emptyset$  pero  $A \subset Y$ , así  $U_x \cap A \neq \emptyset$ . Así,  $x$  es un punto  $\alpha$ -semi adherente de  $A$  y por la Proposición **2.4.4**,  $x \in \alpha\text{-sCl}(A)$ . Por lo que  $x \in Y \cap \alpha\text{-sCl}(A)$ . Con lo que tenemos  $\alpha_Y\text{-sCl}(A) \subset Y \cap \alpha\text{-sCl}(A)$ .

Sea  $x \in Y \cap (\alpha\text{-sCl}(A))$ . Probaremos que  $x$  es un punto  $\alpha_Y$ -semi adherente

de  $A$ . Sea  $V_x \in \alpha_Y\text{-sO}(Y)$  con  $x \in V_x$ , entonces existe  $W \in \Gamma$  tal que

$$W \cap Y \subset V_x \subset \alpha_Y(W \cap Y) = \alpha(W) \cap Y.$$

Por lo anterior, tenemos que  $W \subset W \cup V_x \subset \alpha(W)$ . Entonces,  $W \cup V_x \in \alpha\text{-sO}(X)$ . Además,  $x \in W \cup V_x$  y  $x \in (\alpha\text{-sCl}(A))$ , por la Proposición **2.4.4**,  $(W \cup V_x) \cap A \neq \emptyset$ .

Sea  $y \in (W \cup V_x) \cap A$ . Es claro que  $y \in Y$ . Ahora,  $y \in W \cup V_x$ . Si  $y \in W$ ,  $y \in W \cap Y \subset V_x$ , así  $y \in V_x \cap A$ . Si  $y \in V_x$ ,  $y \in V_x \cap A$ . En cualquier caso  $V_x \cap A \neq \emptyset$ . Por lo que  $x$  es un punto  $\alpha_Y$ -semi adherente de  $A$ , por la Proposición **2.4.4**,  $x \in \alpha_Y\text{-sCl}(A)$ . Por lo tanto  $Y \cap \alpha\text{-sCl}(A) \subset \alpha_Y\text{-sCl}(A)$ . Con lo anterior, concluimos que  $\alpha_Y\text{-sCl}(A) = Y \cap \alpha\text{-sCl}(A)$ . ■

**Proposición 2.5.5** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \Gamma_Y, \alpha_Y)$  y  $A \subset Y$ . Se cumple que  $\alpha\text{-sInt}(A) \cap Y \subset \alpha_Y\text{-sInt}(A)$ .

**Demostración.** Sea  $x \in \alpha\text{-sInt}(A) \cap Y$ . Entonces, existe  $U \in \alpha\text{-sO}(X)$  con  $x \in U \subset A$ . Como  $U \in \alpha\text{-sO}(X)$ , existe  $W \in \Gamma$  tal que  $W \subset U \subset \alpha(W)$ . De lo anterior, observamos que

$$W \cap Y \subset U \cap Y \subset \alpha(W) \cap Y = \alpha_Y(W \cap Y),$$

con  $W \cap Y \in \Gamma_Y$ . Así,  $U \cap Y \in \alpha_Y\text{-sO}(Y)$ . Además  $x \in U \cap Y \subset A$ . Por lo que  $x \in \alpha_Y\text{-sInt}(A)$ . Así, concluimos que  $\alpha\text{-sInt}(A) \cap Y \subset \alpha_Y\text{-sInt}(A)$ . ■

Funciones  $(\alpha, \beta)$ -semi continuas,  
 $(\alpha, \beta)$ -semi abiertas &  $(\alpha, \beta)$ -semi  
cerradas

---

### 3.1. Funciones $(\alpha, \beta)$ -semi continuas

**Definición 3.1.1** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$  y  $f : (X, \Gamma, \alpha) \rightarrow (Y, \mathcal{T}, \beta)$  una función. Diremos que  $f$  es  **$(\alpha, \beta)$ -semi continua** si para cada  $V \in \beta\text{-sO}(Y)$ ,  $f^{-1}(V) \in \alpha\text{-sO}(X)$ .

**Ejemplo 3.1.2** Sean  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u, \text{Int})$ ,  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u, \text{Cl})$  y  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u, \text{Int}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u, \text{Cl})$  definida como  $f(x) = k$ , donde  $k \in \mathbb{R}$  constante.

**Afirmación.** La función  $f$  es  $(\text{Int}, \text{Cl})$ -semi continua.

Sea  $V \in \text{Cl-sO}(\mathbb{R})$ . Consideremos los siguientes casos:

**Caso I.** Supongamos que  $k \in V$ .

Dado que  $k \in V$ ,  $f^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in V\} = \mathbb{R}$ , además  $\mathbb{R} \in \text{Int-sO}(\mathbb{R})$ .

**Caso II.** Supongamos que  $k \notin V$ .

Dado que  $k \notin V$ ,  $f^{-1}(V) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in V\} = \emptyset$ , además  $\emptyset \in \text{Int-}sO(\mathbb{R})$ .

Por ambos casos, se tiene que  $f$  es  $(\text{Int}, \text{Cl})$ -semi continua.

**Proposición 3.1.3** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$ ,  $(Z, \Psi, \theta)$ ,  $f : (X, \Gamma, \alpha) \rightarrow (Y, \mathcal{T}, \beta)$  una función  $(\alpha, \beta)$ -semi continua y  $g : (Y, \mathcal{T}, \beta) \rightarrow (Z, \Psi, \theta)$  una función  $(\beta, \theta)$ -semi continua. Entonces, la composición  $g \circ f : (X, \Gamma, \alpha) \rightarrow (Z, \Psi, \theta)$  es una función  $(\alpha, \theta)$ -semi continua.

**Demostración.** Sea  $V \in \theta\text{-}sO(Z)$ . Notemos que:

$$(g \circ f)^{-1}(V) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V) = f^{-1}(g^{-1}(V)).$$

Como  $V \in \theta\text{-}sO(Z)$  y  $g$  es  $(\beta, \theta)$ -semi continua,  $g^{-1}(V) \in \beta\text{-}sO(Y)$ . Así, dado que  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi continua,  $f^{-1}(g^{-1}(V)) \in \alpha\text{-}sO(X)$ . De donde  $(g \circ f)^{-1}(V) \in \alpha\text{-}sO(X)$ . Por lo tanto  $g \circ f$  es una función  $(\alpha, \theta)$ -semi continua. ■

**Ejemplo 3.1.4** Sean  $X = \{a, b, c\}$  con  $\Gamma = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$  su topología,  $\text{Int}$  el operador interior asociado a  $\Gamma$  y  $Y = \{1, 2, 3\}$  con  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, Y\}$  su topología,  $\text{Cl}$  el operador cerradura asociado a  $\mathcal{T}$ . Definimos  $f : (X, \Gamma, \text{Int}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}, \text{Cl})$  como sigue

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = a, \\ 2, & \text{si } x = b, \\ 3, & \text{si } x = c. \end{cases}$$

**Afirmación 1.** Se cumple que  $\{1, 3\} \in \text{Cl-s}O(Y)$ .

Observemos que  $\{1\} \in \mathcal{T}$  y  $\text{cl}(\{1\}) = \{1, 3\}$ . Así,  $\{1\} \subset \{1, 3\} \subset \text{cl}(\{1\})$ . Por lo que  $\{1, 3\} \in \text{Cl-s}O(Y)$ .

**Afirmación 2.** El conjunto  $f^{-1}(\{1, 3\})$  no es Int-semi abierto.

Veamos que  $f^{-1}(\{1, 3\}) = \{x \in X : f(x) \in \{1, 3\}\} = \{a, c\}$  y nótese que  $\{a, c\} \notin \text{Int-s}O(X)$ . Por lo que  $f^{-1}(\{1, 3\}) \notin \text{Int-s}O(X)$ .

De las Afirmaciones 1 y 2, tenemos que  $f$  no es (Int, Cl)-semi continua.

**Teorema 3.1.5** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$  con  $\alpha, \beta$  monótonos y  $f : (X, \Gamma, \alpha) \rightarrow (Y, \mathcal{T}, \beta)$  una función. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes:

- i.*  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi continua.
- ii.* Si  $F \in \beta\text{-s}C(Y)$ , entonces  $f^{-1}(F) \in \alpha\text{-s}C(X)$ .
- iii.*  $f(\alpha\text{-sCl}(A)) \subset \beta\text{-sCl}(f(A))$  para cualquier  $A \subset X$ .
- iv.*  $\alpha\text{-sCl}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\beta\text{-sCl}(B))$  para cada  $B \subset Y$ .

**Demostración.** Probaremos que *i.* implica *ii.* Sea  $F \in \beta\text{-s}C(Y)$ . Dado que  $Y \setminus F \in \beta\text{-s}O(Y)$  y  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi continua,  $f^{-1}(Y \setminus F) \in \alpha\text{-s}O(X)$ . Dado que  $f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F)$ ,  $X \setminus f^{-1}(F) \in \alpha\text{-s}O(X)$ . Por lo que  $f^{-1}(F) \in \alpha\text{-s}C(X)$ .

Ahora, probaremos que *ii.* implica *iii.* Sea  $A \subset X$ . Como  $\beta\text{-sCl}(f(A)) \in \beta\text{-s}C(Y)$ , por *ii.*, tenemos que  $f^{-1}(\beta\text{-sCl}(f(A))) \in \alpha\text{-s}C(X)$ .

Como  $f(A) \subset Y$ , por el inciso *i.*, de la Proposición **2.4.5**, se tiene que  $f(A) \subset \beta\text{-sCl}(f(A))$ , implica que  $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\beta\text{-sCl}(f(A)))$ . Por la Definición **2.4.2**, tenemos que  $\alpha\text{-sCl}(A) \subset f^{-1}(\beta\text{-sCl}(f(A)))$  entonces  $f(\alpha\text{-sCl}(A)) \subset \beta\text{-sCl}(f(A))$ .

A continuación, probaremos que *iii.*, implica *iv.* Sean  $B \subset Y$  y  $A = f^{-1}(B)$ . Por *iii.* sabemos que  $f(\alpha\text{-sCl}(A)) \subset \beta\text{-sCl}(f(A))$  y como  $f(A) \subset B$ , entonces  $\beta\text{-sCl}(f(A)) \subset \beta\text{-sCl}(B)$ . De lo anterior tenemos que  $f(\alpha\text{-sCl}(A)) \subset \beta\text{-sCl}(B)$ . Por lo tanto  $\alpha\text{-sCl}(A) \subset f^{-1}(\beta\text{-sCl}(B))$ , es decir,  $\alpha\text{-sCl}(f^{-1}(B)) \subset f^{-1}(\beta\text{-sCl}(B))$ .

Finalmente, probaremos que *iv.* implica *i.* Sea  $V \in \beta\text{-sO}(Y)$ . Entonces  $Y \setminus V \in \beta\text{-sC}(Y)$ , así,  $Y \setminus V = \beta\text{-sCl}(Y \setminus V)$ , por el inciso *iv.*, tenemos que  $\alpha\text{-sCl}(f^{-1}(Y \setminus V)) \subset f^{-1}(\beta\text{-sCl}(Y \setminus V))$ . De lo anterior,  $\alpha\text{-sCl}(f^{-1}(Y \setminus V)) \subset f^{-1}(Y \setminus V)$ . Por el inciso *i.* de la Proposición **2.4.5**, tenemos que  $\alpha\text{-sCl}(f^{-1}(Y \setminus V)) = f^{-1}(Y \setminus V)$ . Por el inciso *ii.* de la Proposición **2.4.6**,  $f^{-1}(Y \setminus V) \in \alpha\text{-sC}(X)$  y tenemos que  $f^{-1}(V) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus V)$ . Por lo tanto  $f^{-1}(V) \in \alpha\text{-sO}(X)$ , es decir,  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi continua. ■

## 3.2. Funciones $(\alpha, \beta)$ -semi abiertas & $(\alpha, \beta)$ -semi cerradas

**Definición 3.2.1** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$  y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Diremos que  $f$  es  **$(\alpha, \beta)$ -semi abierta** si para cada  $U \in \alpha\text{-sO}(X)$ ,  $f(U) \in \beta\text{-sO}(Y)$ .

**Ejemplo 3.2.2** Consideremos  $X = \{1, 2, 3\}$  con  $\Gamma = \{\emptyset, \{1\}, X\}$  su topología, el operador asociado a  $\Gamma$ ,  $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definido como

$$\alpha(A) = \begin{cases} A \cup \{2\}, & \text{si } 2 \notin A, \\ A, & \text{si } 2 \in A. \end{cases}$$

---

### 3.2 Funciones $(\alpha, \beta)$ -semi abiertas & $(\alpha, \beta)$ -semi cerradas

---

y consideremos  $Y = \{a, b\}$  con  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, Y\}$  su topología, el operador asociado a  $\mathcal{T}$ ,  $\beta : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  definido como

$$\beta(B) = \begin{cases} B \cup \{b\}, & \text{si } b \notin A, \\ B, & \text{si } b \in A. \end{cases}$$

Definimos  $f : (X, \Gamma, \alpha) \rightarrow (Y, \mathcal{T}, \beta)$  como

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x = 1 \text{ o } x = 2, \\ b, & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

Observemos que  $\alpha\text{-sO}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, X\}$  y calculamos sus imágenes bajo  $f$ ,

$$\begin{aligned} f(\emptyset) &= \emptyset, \\ f(\{1\}) &= \{a\}, \\ f(\{2\}) &= \{a\}, \\ f(\{1, 2\}) &= \{a\}, \\ f(\{1, 3\}) &= Y, \\ f(X) &= Y. \end{aligned}$$

Dado que  $\emptyset, \{a\}, Y \in \beta\text{-sO}(Y)$ , concluimos que  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi abierta.

**Definición 3.2.3** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$  y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Diremos que  $f$  es  **$(\alpha, \beta)$ -semi cerrada** si para cada  $F \in \alpha\text{-sC}(X)$ ,  $f(F) \in \beta\text{-sC}(Y)$ .

**Ejemplo 3.2.4** Sean  $X = \{1, 2, 3\}$  con  $\Gamma = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\}$  su topología, Int el operador interior asociado a  $\Gamma$  y  $Y = \{a, b\}$  con  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, Y\}$  su to-

---

pología,  $\text{Int}$  el operador interior asociado a  $\mathcal{T}$ . Consideremos  $f : (X, \Gamma, \text{Int}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}, \text{Int})$  definida de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{si } x = 1 \text{ o } x = 2, \\ b, & \text{si } x = 3. \end{cases}$$

Observemos que  $\alpha\text{-sO}(X) = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\}$ , entonces  $\alpha\text{-sC}(X) = \{X, \{2, 3\}, \{3\}, \emptyset\}$  y calculamos sus imágenes bajo  $f$ ,

$$\begin{aligned} f(X) &= Y, \\ f(\{2, 3\}) &= Y, \\ f(\{3\}) &= \{b\}, \\ f(\emptyset) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Dado que  $\emptyset, \{a\}, Y \in \beta\text{-sO}(Y)$ , entonces  $Y, \{b\}, \emptyset \in \beta\text{-sC}(Y)$ . Por lo tanto  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi cerrada.

**Teorema 3.2.5** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$  con  $\alpha, \beta$  monótonos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Entonces  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi abierta si y sólo si para cada  $A \subset X$ ,  $f(\alpha\text{-sInt}(A)) \subset \beta\text{-sInt}(f(A))$ .

**Demostración.** Supongamos que  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi abierta. Sea  $A \subset X$ . Como  $\alpha$  es monótono, por el Teorema 2.3.3,  $\alpha\text{-sInt}(A) \in \alpha\text{-sO}(X)$  y dado que  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi abierta  $f(\alpha\text{-sInt}(A)) \in \beta\text{-sO}(Y)$ . Dado que  $\alpha\text{-sInt}(A) \subset A$ ,  $f(\alpha\text{-sInt}(A)) \subset f(A)$ . Como  $f(\alpha\text{-sInt}(A)) \in \beta\text{-sO}(Y)$  y  $f(\alpha\text{-sInt}(A)) \subset f(A)$ , por la Definición 2.4.1,  $f(\alpha\text{-sInt}(A)) \subset \beta\text{-sInt}(f(A))$ .

Ahora, supongamos que para cada  $A \subset X$ ,  $f(\alpha\text{-sInt}(A)) \subset \beta\text{-sInt}(f(A))$ . Sea  $U \in \alpha\text{-sO}(X)$ . Probaremos que  $f(U) \in \beta\text{-sO}(Y)$ . Como  $\alpha$  es monótono, por el inciso *i.* de la Proposición **2.4.6**,  $U = \alpha\text{-sInt}(U)$ . Por hipótesis y el inciso *i* de la Proposición **2.4.5**, tenemos que

$$\beta\text{-sInt}(f(U)) \subset f(U) = f(\alpha\text{-sInt}(U)) \subset \beta\text{-sInt}(f(U)).$$

Así,  $\beta\text{-sInt}(f(U)) = f(U)$  y como  $\beta$  es monótono, por el inciso *i.* de la Proposición **2.4.6**,  $f(U) \in \beta\text{-sO}(Y)$ . Por lo tanto  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi abierta. ■

**Teorema 3.2.6** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$  con  $\alpha, \beta$  monótonos y  $f : X \rightarrow Y$  una función. Entonces  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi cerrada si y sólo si para cada  $A \subset X$ ,  $\beta\text{-sCl}(f(A)) \subset f(\alpha\text{-sCl}(A))$ .

**Demostración.** Supongamos que  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi cerrada. Sea  $A \subset X$ . Como  $\alpha$  es monótono, por el Teorema **2.3.3**,  $\alpha\text{-sCl}(A) \in \alpha\text{-sC}(X)$  y dado que  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi cerrada,  $f(\alpha\text{-sCl}(A)) \in \beta\text{-sC}(Y)$ . Por el inciso *i.* de la Proposición **2.4.5**,  $A \subset \alpha\text{-sCl}(A)$ . Así,  $f(A) \subset f(\alpha\text{-sCl}(A))$ . Como  $f(\alpha\text{-sCl}(A)) \in \beta\text{-sC}(Y)$  y  $f(A) \subset f(\alpha\text{-sCl}(A))$ , por la Definición **2.4.2**,  $\beta\text{-sCl}(f(A)) \subset f(\alpha\text{-sCl}(A))$ .

Ahora, supongamos que para cada  $A \subset X$ ,  $\beta\text{-sCl}(f(A)) \subset f(\alpha\text{-sCl}(A))$ . Sea  $F \in \alpha\text{-sC}(X)$ . Como  $\alpha$  es monótono,  $F = \alpha\text{-sCl}(F)$ . Por hipótesis y por el inciso *i.* de la Proposición **2.4.5**, tenemos que

$$f(F) \subset \beta\text{-sCl}(f(F)) \subset f(\alpha\text{-sCl}(F)) = f(F).$$

### 3.2 Funciones $(\alpha, \beta)$ -semi abiertas & $(\alpha, \beta)$ -semi cerradas

---

Así,  $\beta\text{-sCl}(f(F)) = f(F)$ . De esto y de que  $\beta$  es monótono, por el inciso *ii.* de la Proposición **2.4.6**,  $f(F) \in \beta\text{-sC}(Y)$ . Por lo tanto,  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi cerrada. ■

# $\alpha$ -Semi Conexidad & $\alpha$ -Semi Compacidad

---

## 4.1. Espacios $\alpha$ -semi conexos

**Definición 4.1.1** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $A, B \subset X$  no vacíos. Los conjuntos  $A, B$  se dicen  **$\alpha$ -semi separados** si  $\alpha\text{-sCl}(A) \cap B = A \cap \alpha\text{-sCl}(B) = \emptyset$ .

**Definición 4.1.2** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $E, A, B \subset X$  no vacíos. Decimos que  $A$  y  $B$  forman una  $\alpha$ -semi separación de  $E$  si  $A$  y  $B$  están  $\alpha$ -semi separados y  $E = A \cup B$ .

**Definición 4.1.3** Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$ . Un conjunto que no puede expresarse como unión de dos conjuntos  $\alpha$ -semi separados se dice que es  **$\alpha$ -semi conexo**.

**Ejemplo 4.1.4** Consideramos el espacio topológico  $X = \{a, b, c, d\}$  con  $\Gamma = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\}$  su topología y el operador  $\alpha : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definido

como:

$$\alpha(A) = \begin{cases} X, & \text{si } A = \{a\} \\ \{a, b, c\}, & \text{si } A = \{a, b\}, \\ \{b, d\}, & \text{si } A = \emptyset, \\ A, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

**Afirmación 1.** El operador  $\alpha$  es asociado a  $\Gamma$ . En efecto, dado que

$$\begin{aligned} \emptyset &\subset \alpha(\emptyset) = \{b, d\}; \\ \{a\} &\subset \alpha(\{a\}) = X; \\ \{a, b\} &\subset \alpha(\{a, b\}) = \{a, b, c\}; \\ X &\subset \alpha(X) = X. \end{aligned}$$

**Afirmación 2.** El conjunto  $E = \{a, c\}$  es  $\alpha$ -semi conexo.

Observemos que  $\alpha\text{-s}O(X) = \{\emptyset, \{b\}, \{d\}, \{b, d\}, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, X\}$ , por lo que  $\alpha\text{-s}C(X) = \{X, \{a, c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, c\}, \{b, c, d\}, \{c, d\}, \{b, d\}, \{b, c\}, \{d\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset\}$ .

Nótese que  $E = A \cup B$  donde  $A = \{a\}$  y  $B = \{c\}$  es la única partición posible.

Tenemos que  $\alpha\text{-s}Cl(A) = \{a, c\}$  y  $\alpha\text{-s}Cl(B) = \{c\}$ . De lo anterior, vemos que

$$\begin{aligned} \alpha\text{-s}Cl(A) \cap B &= \{a, c\} \cap \{c\} = \{c\}, \\ A \cap \alpha\text{-s}Cl(B) &= \{a\} \cap \{c\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Por lo que  $A, B$  no están  $\alpha$ -semi separados. Por lo tanto  $E$  es  $\alpha$ -semi conexo.

Cuando  $\alpha$  es el operador identidad, las definiciones anteriores nos dan la definición usual de conexidad. Los siguientes resultados presentan una gene-

---

realización análoga de los que la conexidad usual presenta.

**Teorema 4.1.5** *Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$ . Entonces,  $X$  es  $\alpha$ -semi conexo si y sólo si los únicos subconjuntos de  $X$  que son simultáneamente  $\alpha$ -semi abiertos y  $\alpha$ -semi cerrados son  $\emptyset$  y  $X$ .*

**Demostración.** Sea  $A \subset X$  tal que  $A \neq X$  y  $A \neq \emptyset$ . Supongamos que  $A$  es  $\alpha$ -semi abierto y  $\alpha$ -semi cerrado. De aquí,  $\alpha\text{-sCl}(A) = A$  y  $\alpha\text{-sCl}(X \setminus A) = X \setminus A$ . Así,

$$\begin{aligned}\alpha\text{-sCl}(A) \cap (X \setminus A) &= A \cap (X \setminus A) = \emptyset; \\ A \cap \alpha\text{-sCl}(X \setminus A) &= A \cap (X \setminus A) = \emptyset\end{aligned}$$

De lo anterior y como  $A \neq \emptyset$  y  $X \setminus A \neq \emptyset$ , se tiene que  $A$  y  $X \setminus A$  forman una  $\alpha$ -semi separación de  $X$ , pero esto es una contradicción pues  $X$  es  $\alpha$ -semi conexo. Por lo que  $A = \emptyset$  o  $A = X$ .

Ahora, supongamos que  $X$  no es  $\alpha$ -semi conexo. Así, existen  $U, V$  dos subconjuntos de  $X$  no vacíos  $\alpha$ -semi separados tales que  $X = U \cup V$ . Vamos a probar que  $U$  y  $V$  son  $\alpha$ -semi abiertos y  $\alpha$ -semi cerrados. Para esto, primero probaremos que  $U = \alpha\text{-sCl}(U)$ . Tenemos que  $U \subset \alpha\text{-sCl}(U)$ . Ahora, sea  $x \in \alpha\text{-sCl}(U)$ . Dado que  $x \in X$  y  $\alpha\text{-sCl}(U) \cap V = \emptyset$ ,  $x \in U$ . Por lo que,  $\alpha\text{-sCl}(U) \subset U$ . De donde  $U = \alpha\text{-sCl}(U)$ .

Similarmente se prueba que  $V = \alpha\text{-sCl}(V)$ . De lo anterior, concluimos que  $U$  y  $V$  son  $\alpha$ -semi cerrados.

Usando que  $U = X \setminus V = X \setminus \alpha\text{-sCl}(V)$  y  $V = X \setminus U = X \setminus \alpha\text{-sCl}(U)$ ,  $U$  y  $V$  son  $\alpha$ -semi abiertos. Por lo que,  $U$  y  $V$  son no vacíos y diferentes de  $X$ ,

tales que son  $\alpha$ -semi abiertos y  $\alpha$ -semi cerrados, esto es una contradicción.

Por lo tanto  $X$  es  $\alpha$ -semi conexo. ■

**Teorema 4.1.6** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $A \subset X$ . Si  $A$  es  $\alpha$ -semi conexo y  $A \subset C \cup D$ , donde  $C$  y  $D$  son  $\alpha$ -semi separados, entonces  $A \subset C$  o  $A \subset D$ .

**Demostración.** Supongamos que  $A \not\subset C$  y que  $A \not\subset D$ , entonces  $A \cap C \neq \emptyset$  y  $A \cap D \neq \emptyset$ . Ahora veamos lo siguiente:

$$\begin{aligned} (A \cap C) \cap \alpha\text{-sCl}(A \cap D) &\subset (A \cap C) \cap [\alpha\text{-sCl}(A) \cap \alpha\text{-sCl}(D)] \\ &\subset C \cap \alpha\text{-sCl}(D) \end{aligned}$$

Y también, tenemos que:

$$\begin{aligned} (A \cap D) \cap \alpha\text{-sCl}(A \cap C) &\subset (A \cap D) \cap [\alpha\text{-sCl}(A) \cap \alpha\text{-sCl}(C)] \\ &\subset D \cap \alpha\text{-sCl}(C) \end{aligned}$$

Pero  $C, D$  son  $\alpha$ -semi separados, entonces  $C \cap \alpha\text{-sCl}(D) = D \cap \alpha\text{-sCl}(C) = \emptyset$ . Por lo que  $(A \cap C) \cap \alpha\text{-sCl}(A \cap D) = (A \cap D) \cap \alpha\text{-sCl}(A \cap C) = \emptyset$ . Notemos que  $A = (A \cap C) \cup (A \cap D)$ . Por lo que  $A \cap C$  y  $A \cap D$  constituyen una  $\alpha$ -semi separación de  $A$  lo cual es una contradicción pues  $A$  es  $\alpha$ -semi conexo. ■

**Teorema 4.1.7** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $C, E \subset X$ . Si  $C$  es  $\alpha$ -semi conexo y  $C \subset \alpha\text{-sCl}(E) \subset \alpha\text{-sCl}(C)$ , entonces  $\alpha\text{-sCl}(E)$  es  $\alpha$ -semi conexo.

**Demostración.** Supongamos que  $\alpha\text{-sCl}(E)$  no es  $\alpha$ -semi conexo, entonces existen  $A, B \subset X$ , no vacíos, tales que  $\alpha\text{-sCl}(E) = A \cup B$  y  $\alpha\text{-sCl}(A) \cap B = A \cap \alpha\text{-sCl}(B) = \emptyset$ . Por el Teorema 4.1.7 debe ocurrir que  $C \subset A$  o  $C \subset B$ .

Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $C \subset A$ . Por el inciso *iii.* de la Proposición 2.4.5, tenemos que  $\alpha\text{-sCl}(C) \subset \alpha\text{-sCl}(A)$ , de aquí,  $\alpha\text{-sCl}(C) \cap B \subset \alpha\text{-sCl}(A) \cap B = \emptyset$ .

Por otra parte,  $B \subset \alpha\text{-sCl}(E) \subset \alpha\text{-sCl}(C)$ , entonces  $B \subset \alpha\text{-sCl}(C) \cap B$ . Por lo que  $B = \emptyset$ , lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\alpha\text{-sCl}(E)$  es  $\alpha$ -semi conexo. ■

**Teorema 4.1.8** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $\{E_i\}_{i \in I}$  una familia de subconjuntos conexos de  $X$  tal que  $\bigcap_{i \in I} E_i \neq \emptyset$ . Entonces  $\bigcup_{i \in I} E_i$  es  $\alpha$ -semi conexo.

**Demostración.** Supongamos que  $\bigcup_{i \in I} E_i$  no es  $\alpha$ -semi conexo, entonces existen  $A, B \subset X$ , no vacíos, tales que son  $\alpha$ -semi separados y  $\bigcup_{i \in I} E_i = A \cup B$ . Sea  $x \in \bigcap_{i \in I} E_i$  y sin pérdida de la generalidad supongamos que  $x \in A$ . Ahora, para cada  $i \in I$ ,  $E_i$  es  $\alpha$ -semi conexo,  $E_i \subset A \cup B$  y  $A, B$  son  $\alpha$ -semi separados, por el Teorema 4.1.7,  $E_i \subset A$  o  $E_i \subset B$ . Como  $A \cap B = \emptyset$ ,  $x \notin B$ , además  $x \in E_i$  y  $x \in A$ , entonces  $E_i \subset A$  para todo  $i \in I$ . De lo anterior  $\bigcup_{i \in I} E_i \subset A$ , por lo que  $B \subset \bigcup_{i \in I} E_i \subset A$  y como  $A \cap B = \emptyset$ ,  $B = \emptyset$  lo cual es una contradicción. Por lo tanto  $\bigcup_{i \in I} E_i$  es  $\alpha$ -semi conexo. ■

**Teorema 4.1.9** Sean  $(X, \Gamma, \alpha), (Y, \mathcal{T}, \beta)$  y  $f$  una función  $(\alpha, \beta)$ -semi continua. Si  $(X, \Gamma, \alpha)$  es  $\alpha$ -semi conexo y  $f$  es sobreyectiva, entonces  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$  es  $\beta$ -semi conexo.

**Demostración.** Supongamos que  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$  no es  $\beta$ -semi conexo, entonces existen  $C, D \subset Y$ , no vacíos, tales que son  $\beta$ -semi separados y  $Y = C \cup D$ . Definamos  $A = f^{-1}(C)$  y  $B = f^{-1}(D)$ , nótese que  $A, B \subset X$  y como  $f$  es sobreyectiva,  $A, B$  son no vacíos. Probaremos que  $A, B$  forman una  $\alpha$ -semi

separación de  $X$ .

Observemos que

$$A \cup B = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(Y) = X.$$

Por otro lado

**Afirmación 1.** Se cumple que  $\alpha\text{-sCl}(A) \cap B = \emptyset$ .

Supongamos que  $\alpha\text{-sCl}(A) \cap B \neq \emptyset$ . Sea  $x \in \alpha\text{-sCl}(A) \cap B$ ,  $x \in B$ , entonces  $f(x) \in D$ . Dado que  $x \in \alpha\text{-sCl}(A)$  y  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi continua por el Teorema **3.1.3**,  $f(x) \in f(\alpha\text{-sCl}(A)) \subset \beta\text{-sCl}(f(A)) = \beta\text{-sCl}(C)$ , así  $f(x) \in \beta\text{-sCl}(C) \cap D$  lo cual es una contradicción pues  $C, D$  son  $\beta$ -semi separados. Por lo que  $\alpha\text{-sCl}(A) \cap B = \emptyset$ .

**Afirmación 2.** Se cumple que  $A \cap \alpha\text{-sCl}(B) = \emptyset$ .

Supongamos que  $A \cap \alpha\text{-sCl}(B) \neq \emptyset$ . Sea  $x \in A \cap \alpha\text{-sCl}(B)$ , entonces  $f(x) \in C$ . Dado que  $x \in \alpha\text{-sCl}(B)$  y  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi continua por el Teorema **3.1.3**,  $f(x) \in f(\alpha\text{-sCl}(B)) \subset \beta\text{-sCl}(f(B)) = \beta\text{-sCl}(D)$ , así  $f(x) \in C \cap \beta\text{-sCl}(D)$  lo cual es una contradicción pues  $C, D$  son  $\beta$ -semi separados. Por lo que  $A \cap \alpha\text{-sCl}(B) = \emptyset$ .

Por todo lo anterior tenemos que  $A, B$  forman una  $\alpha$ -semi separación de  $X$ , es decir,  $(X, \Gamma, \alpha)$  no es  $\alpha$ -semi conexo pero esto es una contradicción. Por lo tanto  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$  es  $\beta$ -semi conexo. ■

## 4.2. Espacios localmente $\alpha$ -semi conexos

**Definición 4.2.1** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  con  $\alpha$  un operador monótono y  $x \in X$ . Definimos la  $\alpha$ -semi componente de  $x$  como la unión de todos los subconjuntos  $\alpha$ -semi conexos de  $X$  que contienen a  $x$  y la denotamos por  $\alpha\text{-sc}(x)$ .

Observemos que por el Teorema 4.1.9, la  $\alpha$ -semi componente de  $x$  es  $\alpha$ -semi conexa. Se sigue de la Definición 4.2.1 la siguiente proposición.

**Proposición 4.2.2** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  con  $\alpha$  un operador monótono y  $x \in X$ . El conjunto  $\alpha\text{-sc}(x)$  es un subconjunto  $\alpha$ -semi conexo maximal de  $X$ .

**Proposición 4.2.3** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  con  $\alpha$  un operador monótono. La colección de las  $\alpha$ -semi componentes de los puntos de  $X$  forman una partición de  $X$ .

**Demostración.** Dado que  $x \in \alpha\text{-sc}(x)$  para todo  $x \in X$ , se tiene que  $\alpha\text{-sc}(x) \neq \emptyset$ . Así,

$$\bigcup_{x \in X} \{x\} \subset \bigcup_{x \in X} \alpha\text{-sc}(x) \subset X.$$

Nótese que  $\bigcup_{x \in X} \{x\} = X$ . Por lo que  $X = \bigcup_{x \in X} \alpha\text{-sc}(x)$ .

Por otro lado, si  $x, y \in X$ , con  $x \neq y$ , entonces  $\alpha\text{-sc}(x) \cap \alpha\text{-sc}(y) = \emptyset$ .

Supongamos que  $\alpha\text{-sc}(x) \cap \alpha\text{-sc}(y) \neq \emptyset$ . Por el Teorema 4.1.9,  $(\alpha\text{-sc}(x) \cup \alpha\text{-sc}(y))$  es  $\alpha$ -semi conexo, pero  $\alpha\text{-sc}(x) \subset (\alpha\text{-sc}(x) \cup \alpha\text{-sc}(y))$  lo cual es una contradicción pues  $\alpha\text{-sc}(x)$  es maximal. Por lo que  $\alpha\text{-sc}(x) \cap \alpha\text{-sc}(y) = \emptyset$ .

Por lo anterior, la colección de las  $\alpha$ -semi componentes de los puntos de  $X$  forman una partición de  $X$ . ■

**Proposición 4.2.4** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  con  $\alpha$  un operador monótono y  $x \in X$ . La  $\alpha$ -semi componente de  $x$  es un conjunto  $\alpha$ -semi cerrado.

**Demostración.** Dado que  $\alpha$  es monótono, por el inciso *ii.* de la Proposición 2.4.6, probaremos que  $\alpha\text{-sc}(x) = \alpha\text{-sCl}(\alpha\text{-sc}(x))$ . Por el inciso *i.* de la Proposición 2.4.5, basta probar que  $\alpha\text{-sCl}(\alpha\text{-sc}(x)) \subset \alpha\text{-sc}(x)$ . Por el Teorema 4.1.8,  $\alpha\text{-sCl}(\alpha\text{-sc}(x))$  es  $\alpha$ -semi conexo y claramente  $x \in \alpha\text{-sCl}(\alpha\text{-sc}(x))$ , dado que  $\alpha\text{-sc}(x)$  es maximal por la Proposición 4.2.2,  $\alpha\text{-sCl}(\alpha\text{-sc}(x)) \subset \alpha\text{-sc}(x)$ . Por lo que  $\alpha\text{-sc}(x) = \alpha\text{-sCl}(\alpha\text{-sc}(x))$  y por lo tanto  $\alpha\text{-sc}(x) \in \alpha\text{-sO}(X)$ . ■

**Definición 4.2.5** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $x \in X$ . Diremos que  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi conexo en  $x$  si y sólo si para cada  $U \in \alpha\text{-so}(X)$  con  $x \in U$ , existe  $A \in \alpha\text{-sO}(X)$ ,  $\alpha$ -semi conexo, tal que  $x \in A \subset U$ . Si  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi conexo en todos sus puntos, entonces diremos que  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi conexo.

El siguiente ejemplo muestra que un conjunto que es localmente  $\alpha$ -semi conexo no implica que sea  $\alpha$ -semi conexo.

**Ejemplo 4.2.6** Consideremos el espacio topológico  $X = \{a, b, c\}$  con  $\Gamma = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$  su topología y  $\text{Cl}$  el operador cerradura asociado a  $\Gamma$ .

Observemos que  $\text{Cl-sO}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X\}$  y  $\text{Cl-sC}(X) = \{X, \{b, c\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b\}, \emptyset\}$

**Afirmación 1.** El conjunto  $X$  es localmente  $\text{Cl}$ -semi conexo.

Dado que  $X = \{a, b, c\}$ , debemos probar que  $X$  es localmente  $\text{Cl}$ -semi conexo en  $a, b, c$ .

Los conjuntos Cl-semi abiertos que contienen a  $a$  son  $\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, X$ . Además,  $\{a\}$  es Cl-semi conexo pues no existen  $A, B \subset X$ , no vacíos, que formen una Cl-semi separación de  $\{a\}$ . Por lo que  $X$  es localmente Cl-semi conexo en  $a$ .

Por otro lado, los conjuntos Cl-semi abiertos que contienen a  $b$  son  $\{a, b\}, X$ . Además,  $\{a, b\}$  es Cl-semi conexo, ya que si suponemos lo contrario, existen  $A, B \subset X$ , no vacíos, Cl-semi separados tal que  $\{a, b\} = A \cup B$ . Sin pérdida de la generalidad,  $A = \{a\}$  y  $B = \{b\}$ . Como  $\text{Cl-sCl}(A) = \{a, b\}$ ,  $\text{Cl-sCl}(A) \cap B = \{b\}$  lo cual es una contradicción. Por lo que  $X$  es localmente Cl-semi conexo en  $b$ .

Finalmente, los conjuntos Cl-semi abiertos que contienen a  $c$  son  $\{c\}, \{a, c\}, X$ . Además,  $\{c\}$  es Cl-semi conexo pues no existen  $A, B \subset X$ , no vacíos, que formen una Cl-semi separación de  $\{c\}$ . Por lo que  $X$  es localmente Cl-semi conexo en  $c$ .

De lo anterior,  $X$  es localmente Cl-semi conexo en  $a, b, c$ . Por lo tanto  $X$  es localmente Cl-semi conexo.

**Afirmación 2.** El conjunto  $X$  no es Cl-semi conexo.

Observemos que  $\{c\}$  y  $\{a, b\}$  son Cl-semi abiertos y Cl-semi cerrados por el Teorema 4.1.6,  $X$  no es Cl-semi conexo.

**Teorema 4.2.7** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  con  $\alpha$  monótono.  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi conexo si y sólo si las  $\alpha$ -semi componentes de cada  $\alpha$ -semi abierto de  $X$  son conjuntos  $\alpha$ -semi abiertos de  $X$ .

**Demostración.** Supongamos que  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi conexo. Sean  $A \in \alpha\text{-}sO(X)$ ,  $C$  una  $\alpha$ -semi componente de  $A$ . Sea  $x \in C$ , entonces  $x \in A$ , además, existe  $U \in \alpha\text{-}sO(X)$ ,  $\alpha$ -semi conexo, tal que  $x \in U \subset A$ . Como  $U$  es  $\alpha$ -semi conexo y  $C$  maximal por la Proposición 4.2.2,  $x \in U \subset C$ . De lo anterior y de la Proposición 2.3.6,  $C \in \alpha\text{-}sO(X)$ .

Ahora, supongamos que las  $\alpha$ -semi componentes de cada  $\alpha$ -semi abierto de  $X$  son conjuntos  $\alpha$ -semi abiertos de  $X$ . Sean  $x \in X$ ,  $A \in \alpha\text{-}sO(X)$ , tales que  $x \in A$ , y  $C$  una  $\alpha$ -semi componente de  $A$ , tal que  $x \in C$  y  $C \in \alpha\text{-}sO(X)$ . Dado que  $x \in C \subset A$ ,  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi conexo en  $x$ , y esto es para cualquier  $x \in X$ , concluimos que  $X$  es  $\alpha$ -semi localmente conexo. ■

### 4.3. Espacios $\alpha$ -semi compactos

En esta sección se estudio los resultados dados por H. Ogata en [11], y que posteriormente fueron generalizados por E. Rosas y J. Vielma en [12].

**Definición 4.3.1** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una cubierta de  $X$ . Si  $A_i \in \alpha\text{-}sO(X)$  para todo  $i \in I$ , entonces llamaremos a  $\{A_i\}_{i \in I}$  una cubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $X$ .

**Definición 4.3.2** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $\{A_i\}_{i \in I}$  una cubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $X$ . Si  $\{B_j\}_{j \in J}$  es una subcolección de  $\{A_i\}_{i \in I}$  y  $X = \bigcup_{j \in J} B_j$  diremos que  $\{B_j\}_{j \in J}$  es una subcubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $X$ .

**Definición 4.3.3** Sea  $(X, \Gamma, \alpha)$ . Diremos que  $X$  es un espacio  $\alpha$ -semi compacto si toda cubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $X$  tiene una subcubierta finita  $\alpha$ -semi abierta de  $X$ .

**Ejemplo 4.3.4** Sean  $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$  y  $E = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . Consideremos a  $E = [0, 1]$  con la topología de subespacio que denotaremos por  $\mathcal{T}_E$  y al operador  $\alpha : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  definido como:

$$\alpha(A) = \begin{cases} A \cup \{1\}, & \text{si } 1 \notin A \\ \text{cl}_E(A), & \text{si } 1 \in A. \end{cases}$$

Dado que  $E$  es compacto, para cualquier cubierta abierta  $\{C_i\}_{i \in I}$ , existen  $i_1, \dots, i_n \in I$  tales que  $\{C_{i_j}\}_{j=1}^n$  es una subcubierta abierta finita de  $E$ . Cada  $C_i \in \mathcal{T}_E$ . Así,  $C_i \in \alpha\text{-sO}(E)$ . Por lo tanto  $E$  es  $\alpha$ -semi compacto.

**Teorema 4.3.5** Sean  $(X, \Gamma, \alpha), (Y, \mathcal{T}, \beta)$  y  $f$  una función  $(\alpha, \beta)$ -semi continua y sobreyectiva. Si  $X$   $\alpha$ -semi compacto, entonces  $Y$  es  $\beta$ -semi compacto.

**Demostración.** Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una cubierta  $\beta$ -semi abierta de  $Y$ . Dado que  $\bigcup_{i \in I} A_i = Y$ , tenemos que

$$\bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i) = f^{-1} \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = f^{-1}(Y) = X.$$

De lo anterior y como  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi continua,  $\{f^{-1}(A_i)\}_{i \in I}$  es una cubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $X$ . Dado que  $X$  es  $\alpha$ -semi compacto, existen  $i_1, \dots, i_n \in I$ , tales que  $\{f^{-1}(A_{i_j})\}_{j=1}^n$  una subcubierta finita  $\alpha$ -semi abierta de  $X$ . Así,  $\bigcup_{j=1}^n f^{-1}(A_{i_j}) = X$ , entonces

$$\bigcup_{j=1}^n (A_{i_j}) = f \left( f^{-1} \left( \bigcup_{j=1}^n A_{i_j} \right) \right) = f \left( \bigcup_{j=1}^n f^{-1}(A_{i_j}) \right) = f(X) = Y.$$

Por lo que  $\{A_{i_j}\}_{j=1}^n$  es una subcubierta finita  $\beta$ -semi abierta de  $Y$ . Por lo tanto  $Y$  es  $\beta$ -semi compacto. ■

**Lema 4.3.6** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \Gamma_Y, \alpha_Y)$ .  $Y$  es  $\alpha_Y$ -semi compacto, si y sólo si, toda cubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $Y$ , tiene una subcubierta finita  $\alpha$ -semi abierta de  $Y$ .

**Demostración.** Supongamos que  $Y$  es  $\alpha_Y$ -semi compacto. Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una cubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $Y$ . Para cada  $A_i$ , existe  $W_i \in \Gamma$  tal que  $W_i \subset A_i \subset \alpha(W_i)$ , entonces  $W_i \cap Y \subset A_i \cap Y \subset \alpha(W_i) \cap Y = \alpha_Y(W_i \cap Y)$  con  $W_i \cap Y \in \Gamma_Y$ . Así,  $A_i \cap Y \in \alpha_Y\text{-sO}(Y)$ . Entonces,  $\{A_i \cap Y\}_{i \in I}$  es una cubierta  $\alpha_Y$ -semi abierta de  $Y$ , como  $Y$  es  $\alpha_Y$ -semi compacto, existen  $i_1, \dots, i_n \in I$  tales que  $Y = \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}$ . Por lo tanto  $\{A_{i_j}\}_{j=1}^n$  es una subcubierta finita  $\alpha$ -semi abierta de  $Y$ .

Ahora, supongamos que toda cubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $Y$ , tiene una subcubierta finita  $\alpha$ -semi abierta de  $Y$ . Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una cubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $Y$ . Entonces, existen  $i_1, \dots, i_n \in I$  tales que  $\{A_{i_j}\}_{j=1}^n$  es una subcubierta finita  $\alpha$ -semi abierta de  $Y$ . Para cada  $A_{i_j}$ , existe  $W_{i_j} \in \Gamma$  tal que  $W_{i_j} \subset A_{i_j} \subset \alpha(W_{i_j})$ , entonces  $W_{i_j} \cap Y \subset A_{i_j} \cap Y \subset \alpha(W_{i_j}) \cap Y = \alpha_Y(W_{i_j} \cap Y)$  con  $W_{i_j} \cap Y \in \Gamma_Y$ . Así,  $A_{i_j} \cap Y \in \alpha_Y\text{-sO}(Y)$ . Como  $\bigcup_{j=1}^n A_{i_j} = Y$ , tenemos que

$$\bigcup_{j=1}^n (A_{i_j} \cap Y) = \left( \bigcup_{j=1}^n A_{i_j} \right) \cap Y = Y.$$

Por lo tanto  $Y$  es  $\alpha_Y$ -semi compacto. ■

**Teorema 4.3.7** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \Gamma_Y, \alpha_Y)$ . Si  $X$  es  $\alpha$ -semi compacto y  $Y \in \alpha\text{-sC}(X)$ , entonces  $Y$  es  $\alpha_Y$ -semi compacto.

---

**Demostración.** Sea  $\{A_i\}_{i \in I}$  una cubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $Y$ , entonces

$$X = Y \cup (X \setminus Y) = \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cup (X \setminus Y).$$

Como  $X \setminus Y \in \alpha\text{-s}O(X)$ ,  $\{A_i\}_{i \in I} \cup \{X \setminus Y\}$  es una cubierta  $\alpha$ -semi abierta de  $X$ . Dado que  $X$  es  $\alpha$ -semi compacto, existen  $i_1, \dots, i_n \in I$  tales que  $\{A_{i_j}\}_{j=1}^n \cup \{X \setminus Y\}$  es una subcubierta finita  $\alpha$ -semi abierta de  $X$ . Así,

$$X = Y \cup (X \setminus Y) = \left( \bigcup_{j=1}^n A_{i_j} \right) \cup (X \setminus Y).$$

Luego,  $Y = \bigcup_{j=1}^n A_{i_j}$ . Por el Lema 4.3.6,  $Y$  es  $\alpha_Y$ -semi compacto. ■

## 4.4. Espacios localmente $\alpha$ -semi compactos

**Definición 4.4.1** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$  y  $x \in X$ . Diremos que  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi compacto en  $x$ , si y sólo si, existen  $K \subset X$   $\alpha$ -semi compacto y  $V \in \alpha\text{-s}O(X)$ , tales que  $x \in V \subset K$ . Si  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi compacto en todos sus puntos, entonces diremos que  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi compacto.

Observamos que como  $X \in \alpha\text{-s}O(X)$ , entonces todo espacio  $\alpha$ -semi compacto es localmente  $\alpha$ -semi compacto.

**Proposición 4.4.2** Sean  $(X, \Gamma, \alpha)$ ,  $(Y, \mathcal{T}, \beta)$ ,  $f$  una función  $(\alpha, \beta)$ -semi continua,  $(\alpha, \beta)$ -semi abierta y sobreyectiva. Si  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi compacto, entonces  $Y$  es localmente  $\beta$ -semi compacto.

**Demostración.** Sea  $y \in Y$ . Como  $f$  es sobreyectiva, existe  $x \in X$  tal que  $f(x) = y$ . Dado que  $X$  es localmente  $\alpha$ -semi compacto existen  $K \subset X$   $\alpha$ -semi compacto y  $V \in \alpha\text{-sO}(X)$ , tales que  $x \in V \subset K$ . Entonces  $y \in f(V) \subset f(K)$ . Dado que  $f$  es  $(\alpha, \beta)$ -semi abierta,  $f(V) \in \beta\text{-sO}(Y)$  y por el Teorema **4.3.5**,  $f(K)$  es  $\beta$ -semi compacto. Por lo que  $Y$  es localmente  $\beta$ -semi compacto en  $y$ . Por lo tanto  $Y$  es localmente  $\beta$ -semi compacto. ■

## Bibliografía

---

- [1] Caldas, M. (1996). La intersección arbitraria de una familia de subconjuntos abiertos con la propiedad s-localmente finita es semi-abierta. *Pro Mathematica*, Vol.10, Nos. 19-20:35–42.
- [2] Carpintero, C., Rosas, E., y Vielma, J. (1998). Operadores asociados a una topología  $\Gamma$  sobre un conjunto  $X$  y nociones conexas. *Divulgaciones Matemáticas*, Vol.6:139–148.
- [3] Carpintero, C., Rosas, E., and Vielma, J. (2002).  $\alpha$ -semi connected and locally  $\alpha$ -semi connected properties in topological spaces. *Scientiae Mathematicae Japonicae Online*, Vol.6:465–472.
- [4] Carpintero, C., Rosas, E., Vielma, J., y Salas, M. (2000). Espacios  $\alpha$ -semi  $T_i$  para  $i = 0, \frac{1}{2}, 1, 2$ . *Pro Mathematica*, Vol.14, Nos. 27-28:37–48.
- [5] Casarrubias, F. y Tamariz, A. (2015). *Elementos de Topología General*. Universidad Nacional Autónoma de México, Coyoacán, México, 2da edición.
- [6] Dugundji, J. (1966). *Topology*. Allyn and Bacon, University of Michigan, 2nd edition.

- [7] Kasahara, S. (1979). Operation-compact spaces. *Mathematica Japonica*, Vol.24, No. 72:97–105.
- [8] Levine, N. (1963). Semi-open and semi-continuity in topological spaces. *The American Mathematical Monthly*, Vol.70:36–41.
- [9] Munkres, J. R. (2002). *Topología*. Pearson Educación, Nuñez de Balboa, 120, 28006, Madrid, 2da edición.
- [10] Navarro, J. y Gordillo, A. (2020). *Apuntes de Topología*. Universidad de Extremadura, España, 1ra edición.
- [11] Ogata, H. (1991). Operation on topological spaces and associated topology. *Mathematica Japonica*, Vol.36, No. 1:175–184.
- [12] Rosas, E. and Vielma, J. (1998). Operator compact and operator connected spaces. *Scientiae Mathematicae*, Vol.1, No. 2:203–208.
- [13] Rosas, E. y Vielma, J. (2000). Compactificación de espacios topológicos mediante operadores. *Divulgaciones Matemáticas*, Vol.8, No. 2:163–167.